Dr.ing. CORNELIU COMANDAR Dr.ing. NICUŞOR AMARIEI

REZISTENȚA MATERIALELOR

CUNOŞTINȚE FUNDAMENTALE

Editura **CERMI**
Iaşi - 1998

BIBLIOTECA UNIVERSITATII TEHNICE
"GHEORGHE ASACHI" DIN IASI
MI010497
374371
BIBLIOTECA
UNIV. TEHNICĂ IAŞI
III-3144
UNIV. TEHNICĂ IAŞI
Bibl. MECANICĂ
Imprumut
27. OCT. 2001

Adresa: Editura CERMI
str. Curelari 16
6600, Iaşi, România
tel/fax: 032 / 116604
Director general: Elena Cernătescu
Şef departament tipografie: Const. Huian
Şef departament serigrafie: Cristian Creţu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
COMANDAR, CORNELIU
Rezistenţa materialelor / Corneliu Comandar, Nicuşor Amariei — Iaşi, CERMI — 1998
248 p.; il.; 24 cm.
Bibliogr.
ISBN 973-9378-47-1
I. Amariei, Nicuşor

539,4

Referenţi ştiinţifici:
conf. dr. ing. Valerian Palihovici
conf. dr. ing. Dorel Leon

Consilier editorial:
Prof. dr. ing. Emanoil Bârsan
Redactor:
Ing. Mihai Cernătescu
Tiparul executat la Tipografia Editurii CERMI Iaşi
sub comanda 108/1998
© Toate drepturile rezervate autorilor

PREFAŢĂ

UNIV. TEHNICĂ IAŞI
BIBL. MECANICĂ

Rezistenţa materialelor este una din disciplinele fundamentale care contribuie la formarea inginerului ca specialist, în aproape toate domeniile tehnicii.

Dobândirea cunoştinţelor teoretice şi experimentale precum şi deprinderea de a rezolva probleme, permit elaborarea unor modele de calcul folosite la dimensionarea sau verificarea rapidă a pieselor, în condiţii de siguranţă dar şi de economie de material şi manoperă.

În acest volum se tratează unitar şi sintetic, noţiunile de bază ale rezistenţei materialelor, solicitările simple ale barelor drepte, flambajul longitudinal şi metodele energetice folosite la studiul deplasărilor şi ridicarea nedeterminării. Însuşirea temeinică a cunoştinţelor din acest volum este absolut necesară pentru abordarea ulterioară a solicitărilor compuse, a solicitărilor dinamice şi a altor probleme complexe de rezistenţa materialelor.

La sfârşitul fiecărui capitol sunt prezentate în spirit ingineresc aplicaţii care ilustrează modul de folosire a metodelor şi relaţiilor de calcul; unde a fost posibil acestea au fost rezolvate prin mai multe metode pentru a evidenţia avantajele sau dezavantajele acestora.

La expunerea problematicii abordate s-au avut în vedere principiile pedagogice generale, specifice disciplinelor tehnice.

Lucrarea se adresează în mod deosebit studenţilor din facultăţile tehnice dar poate servi şi inginerilor, pentru actualizarea cunoştinţelor fundamentale de rezistenţa materialelor.

Autorii îşi exprimă recunoştinţa faţă de înaintaşii pe lângă care s-au format în Politehnica ieşeană.

Autorii

Universitatea Tehnică Iaşi
BIBLIOTECA

La elaborarea acestei lucrări, autorii au contribuit în mod egal.

CUPRINS

1. INTRODUCERE **9**

1.1. Obiectul şi problemele rezistenţei materialelor 9

1.2. Istoric 10

1.3. Clasificarea corpurilor 12

1.4. Clasificarea forţelor 14

1.5. Materiale utilizate 18

2. NOŢIUNI FUNDAMENTALE ALE REZISTENŢEI MATERIALELOR **20**

2.1. Aspectul static al problemelor de rezistenţa materialelor 20

2.1.1. Tipuri de reazeme. Calculul analitic al reacţiunilor 20

2.1.2. Eforturi. Metoda secţiunilor. Tipuri de solicitări 25

2.1.3. Relaţii diferenţiale între eforturi şi între eforturi şi sarcini 31

2.1.3.1. Relaţii diferenţiale în cazul barelor drepte solicitate de forţe coplanare 31

2.1.3.2. Relaţii diferenţiale pentru barele curbe plane solicitate de forţe coplanare 33

2.1.4. Trasarea diagramelor de eforturi 35

2.1.4.1. Diagrame de forţe axiale 37

2.1.4.2. Diagrame de momente de torsiune 38

2.1.4.3. Diagrame de forţe tăietoare şi momente încovoietoare 40

2.1.4.4. Diagrame de eforturi la sisteme plane de bare drepte 45

2.1.4.5. Diagrame de eforturi la bare curbe plane 48

2.1.4.6. Diagrame de eforturi la sisteme spaţiale de bare 50

2.1.5. Noţiunea de tensiune 52

2.1.6. Ecuaţii de echivalenţă între eforturi şi forţele corespunzătoare tensiunilor 53

2.2. Aspectul geometric al problemelor de rezistenţa materialelor 55

2.3. Aspectul fizic al problemelor de rezistenţa materialelor 58

2.3.1. Încercarea la tracţiune 58

2.3.2. Curba caracteristică a materialelor 60

2.3.3. Legea lui Hooke 62

2.3.4. Diferite forme ale curbei caracteristice 63

2.3.5. Caracteristici mecanice ale materialelor solicitate la tracţiune 65

2.3.6. Carcteristici elastice ale materialelor 65

2.3.7. Factori care influenţează carcteristicile mecanice şi elastice ale materialelor 66

2.4. Ipoteze de bază în rezistența materialelor 67
2.5. Metode de calcul în rezistența materialelor..... 68
3. SOLICITAREA DE ÎNTINDERE ŞI COMPRESIUNE A BARELOR DREPTE 71
3.1. Calculul tensiunilor normale la solicitări axiale 72
3.2. Calculul deformațiilor la solicitări axiale..... 74
3.3. Calculul energiei potențiale de deformație 75
3.4. Solicitarea axială la care se ține seama de greutatea proprie 77
3.5. Concentratori de tensiuni..... 81
3.6. Tensiuni din secțiuni înclinate la solicitări axiale 82
3.7. Aplicații 85
3.7.1. Probleme static determinate 85
3.7.2. Probleme static nedeterminate 87
4. SOLICITAREA DE FORFECARE A BARELOR DREPTE 97
4.1. Calculul tensiunilor tangențiale la solicitarea de forfecare .. 97
4.2. Deformații şi deplasări la solicitarea de forfecare 100
4.3. Calculul energiei potențiale de deformație..... 100
4.4. Dualitatea tensiunilor tangențiale 101
4.5. Relația între caracteristicile elastice E, G şi ν 102
4.6. Tensiuni din secțiuni înclinate la forfecarea pură 103
4.7. Aplicații 105
5. SOLICITAREA DE RĂSUCIRE A BARELOR DREPTE DE SECȚIUNE CIRCULARĂ 110
5.1. Calculul tensiunilor tangențiale la solicitarea de răsucire .. 111
5.2. Calculul deformațiilor la solicitarea de răsucire 116
5.3. Calculul energiei potențiale de deformație 118
5.4. Concentratori de tensiuni 118
5.5. Tensiuni din secțiuni înclinate la solicitarea de răsucire 120
5.6. Aplicații 121
6. SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE A BARELOR DREPTE 130
6.1. Calculul tensiunilor normale la solicitarea de încovoiere pură 131
6.2. Calculul tensiunilor la solicitarea de încovoiere simplă a barelor drepte 137
6.3. Tensiuni din secțiuni înclinate la solicitarea de încovoiere a grinzilor drepte 149
6.4. Forme raționale ale barelor drepte solicitate la încovoiere .. 153
6.5. Concentratori de tensiuni 159
6.6. Deformații şi deplasări ale barelor drepte solicitate la încovoiere 160

6.6.1. Ecuaţia diferenţială a axei deformate 161
6.6.2. Integrarea directă a ecuaţiei diferenţiale a axei deformate 162
6.6.3. Metoda Clebsch 169
6.6.4. Metoda grafo-analitică 173
6.7. Calculul energiei potenţiale de deformaţie 177
6.8. Aplicaţii 179
6.8.1. Probleme static determinate 179
6.8.2. Probleme static nedeterminate 187

7. STABILITATEA BARELOR DREPTE SOLICITATE LA COMPRESIUNE 197
7.1. Echilibrul elastic, stabilitate şi instabilitate 197
7.2. Forţa critică de flambaj pentru bara dreaptă solicitată la compresiune 199
7.2.1. Bara articulată la ambele capete 199
7.2.2. Bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt 201
7.2.3. Bara încastrată la un capăt şi articulată la celălalt 202
7.2.4. Bara încastrată la ambele capete 205
7.3. Forma generală a formulei lui Euler şi limitele ei de aplicare 207
7.3.1. Flambajul elastic 207
7.3.2. Flambajul plastic 209
7.4. Calculul la flambaj 210
7.5. Aplicaţii 211

8. METODE ENERGETICE PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR ŞI RIDICAREA NEDETERMINĂRII 215
8.1. Teorema reciprocităţii lucrului mecanic (teorema lui Betti) 215
8.2. Teorema reciprocităţii deplasărilor (teorema lui Maxwell) 218
8.3. Teorema reciprocităţii forţelor 218
8.4. Teoremele lui Castigliano 219
8.5. Teorema minimului energiei potenţiale de deformaţie 223
8.6. Calculul deplasărilor prin metoda Mohr-Maxwell 225
8.7. Procedeul Mohr-Vereşceaghin 226
8.8. Metoda eforturilor 228
8.8.1. Sistem de bază 228
8.8.2. Ecuaţiile canonice ale metodei eforturilor 229
8.9. Calculul deplasărilor la sistemele static nedeterminate 232
8.10. Aplicaţii 234
8.10.1. Calculul deplasărilor 234
8.10.2. Sisteme static nedeterminate 240

Bibliografie 247

1. INTRODUCERE

1.1. Obiectul şi problemele rezistenţei materialelor

Rezistenţa materialelor este una din disciplinele de bază în pregătirea inginerului pentru că ea răspunde unor probleme concrete, de mare importanţă practică, privind siguranţa în exploatare a elementelor componente ale maşinilor şi instalaţiilor.

Obiectul disciplinei *Rezistenţa materialelor* îl constituie studiul comportării construcţiilor inginereşti (maşini, instalaţii, clădiri, poduri, avioane, vapoare etc.) sub acţiunea forţelor la care acestea sunt supuse în exploatare.

Problemele rezistenţei materialelor pot fi grupate în două mari categorii:

- ***probleme de dimensionare***, care constau în stabilirea dimensiunilor minime (uneori a formei) şi materialelor din care urmează a fi realizate diferitele piese, astfel încât sub acţiunea forţelor *să se asigure rezistenţa, rigiditatea şi stabilitatea* construcţiei din care fac parte;

- ***probleme de verificare***, care constau în a determina dacă o piesă dintr-un anumit material şi cu dimensiuni cunoscute respectă sau nu, sub acţiunea forţelor, condiţiile de *rezistenţă, stabilitate şi rigiditate*.

Condiţiile de *rezistenţă* se referă la valorile tensiunilor care apar în corpul solicitat, condiţiile de *rigiditate* se referă la valorile deformaţiilor produse, iar condiţiile de *stabilitate* consideră posibilitatea menţinerii formei de echilibru pentru o anumită stare de încărcare.

Rezistenţa materialelor face parte din grupul de discipline numit Mecanica solidului deformabil, din care mai fac parte Teoria elasticităţii, Teoria plasticităţii, Teoria oscilaţiilor mecanice, Statica, dinamica şi stabilitatea construcţiilor, Mecanica pământurilor etc.

Rezistența materialelor este o știință cu un pronunțat caracter practic, care acordă o importanță deosebită experimentărilor și încercărilor de materiale. Pe baza interpretării rezultatelor experimentale, în rezistența materialelor se admit *ipoteze simplificatoare* ce permit stabilirea unor relații de calcul care exprimă suficient de fidel mărimea solicitărilor, gradul de rigiditate și stabilitate a organelor de mașini și a elementelor de construcții aflate sub acțiunea forțelor.

1.2. Istoric

Numeroși autori consideră că începuturile Rezistenței materialelor ca știință se situează în anul 1638, când **Galileo Galilei** (1564-1642) a publicat la Leyda (Olanda) lucrările sale cu titlul *"Discorsi e dimonstrazione matematiche intorno a due nuove scienze"*.

Fizicianul englez **Robert Hooke** (1635-1703), formulează în lucrarea *"De potentia restitutiva"* apărută în anul 1678 legea de bază a rezistenței materialelor și teoriei elasticității ***"ut tensio sic vis"*** (cât este întinderea atât este și forța), care exprimă proporționalitatea dintre tensiuni și deformații specifice.

Dezvoltarea ulterioară a științei *Rezistenței materialelor* este rodul activității numeroșilor savanți, matematicieni, fizicieni și ingineri, dintre care se amintesc:

- **E. Mariotte** (1620-1684) - formulează teoria de rezistență care consideră factor preponderent deformația specifică maximă;
- **J. Bernoulli** (1654-1705) - formulează ipoteza secțiunilor plane;
- **L. Euler** (1707-1783) - stabilește expresia forței critice de flambaj a barelor comprimate;
- **Ch. A. Coulomb** (1736-1806) - formulează teoria de rezistență care consideră factor preponderent tensiunea tangențială maximă;
- **J. L. Lagrange** (1736-1813) - formulează principiul deplasărilor virtuale pe baza căruia se calculează deplasările elastice ale corpurilor;

UNIV. TEHNICĂ IAȘI
BIBL. MECANICĂ
Împrumut

- **L. Navier** (1785-1836) - stabileşte formula de calcul a tensiunilor normale pentru barele încovoiate şi publică prima carte de Rezistenţa materialelor (1826);
- **D. I. Juravski** (1821-1891) - stabileşte legea de variaţie a tensiunilor tangenţiale la barele încovoiate;
- **T. Young** (1773-1829) - defineşte modulul de elasticitate;
- **Barré de Saint Venant** (1797-1886) - studiază răsucirea barei drepte cu secţiunea de formă oarecare;
- **A. L. Cauchy** (1789-1857) - contribuie la stabilirea ecuaţiilor fundamentale ale teoriei elasticităţii;
- **E. Clapeyron** (1799-1864) - stabileşte ecuaţia celor trei momente;
- **F. S. Iasinski** (1856-1899) şi **Tetmayer** (1850-1905) - stabilesc relaţii de calcul în domeniul flambajului elasto-plastic;
- **H. R. Hertz** (1857-1894) - stabileşte distribuţia tensiunilor în cazul contactului elastic;
- **Sophie Germain** (1776-1831) - stabileşte ecuaţia diferenţială a suprafeţei mediane deformate pentru plăcile plane;
- **H. Tresca** (1814-1885) - formulează o teorie a plasticităţii bazată pe criteriul tensiunii tangenţiale maxime;
- **C. Otto-Mohr** (1835-1918) - elaborează o teorie de rupere care îmbunătăţeşte teoria lui Coulomb;
- **J. C. Maxwell** (1831-1879) - stabileşte relaţii pentru calculul deplasărilor corpurilor elastice şi elaborează un model reologic pentru relaxarea tensiunilor;
- **B. N. Galerkin** (1871-1945) - lucrări în domeniul plăcilor;
- **N. M. Beleaev** (1890-1944) - curs şi probleme de rezistenţa materialelor;
- **N. I. Mushelişvili** (1891-1970) - probleme de teoria elasticităţii;
- **V. Z. Vlasov** (1906-1958) - elaborează teoria barelor cu pereţi subţiri;
- **L. Prandtl** (1875-1953) - contribuţii în domeniul teoriei elasticităţii şi plasticităţii;
- **A. Nadai** - contribuţii în domeniul teoriei plasticităţii;
- **S. P. Timoshenko** (1878-1972) - contribuţii în numeroase domenii ale mecanicii aplicate.

UNIV. TEHNICĂ IAȘI
BIBL. MECANICĂ
Împrumut

În România se remarcă realizările deosebite ale unor străluciţi ingineri şi educatori cum ar fi:

- **Anghel Saligny** (1854-1954) - realizează podul de cale ferată de la Cernavodă (cel mai mare din Europa continentală, la timpul respectiv), folosind un sistem constructiv nou;
- **Elie Radu** (1853-1931) - iniţiază construcţia podurilor de şosea din beton armat;
- **Gh. Emilian Filipescu** (1882-1937) - elaborează o metodă generală pentru studiul sistemelor static nedeterminate şi publică un tratat de statica construcţiilor şi rezistenţa materialelor.

În ultimile decenii, numeroase lucrări teoretice şi experimentale au fost realizate în principal de cadre didactice universitare remarcându-se profesori ca: **A. Beleş** (1891-1976); **C. C. Teodorescu** (1892-1972); **M. Hangan** (1897-1964); **Şt. Nădăşan** (1901-1967); **Gh. Buzdugan** (n.1916).

În privinţa publicării cursurilor de Rezistenţa materialelor se remarcă următoarele apariţii importante:

- *Curs de mecanică aplicată la rezistenţa materialelor şi stabilitatea construcţiilor*, publicat în 1893 de prof. **Constantin Mănescu** de la Şcoala de poduri şi şosele din Bucureşti;
- *Rezistenţa materialelor*, curs publicat în 1923 de prof. **C. C. Teodorescu**;
- *Statica construcţiilor şi rezistenţa materialelor*, curs publicat în 1935 de prof. **Gh. Em. Filipescu**;
- *Rezistenţa materialelor*, curs publicat în peste 10 ediţii de acad. **Gh. Buzdugan**.

1.3. Clasificarea corpurilor

În rezistenţa materialelor, piesele componente ale construcţiilor, maşinilor şi instalaţiilor, care uneori pot avea forme foarte complicate, sunt schematizate, astfel încât în urma simplificărilor sunt studiate un număr redus de corpuri. Prin studiul unui corp redus la o schemă, se obţine soluţia unei întregi clase de corpuri reale ce se reduc la schema studiată.

În funcţie de raportul dintre principalele dimensiuni, corpurile se împart în trei mari categorii, prezentate în continuare.

1. Corpuri la care una din dimensiuni este mare în raport cu celelalte două.

Corpurile din această categorie se numesc **bare.**

O bară se obţine prin deplasarea unei suprafeţe pe o curbă, astfel încât suprafaţa să fie mereu normală pe curbă şi cu centrul de greutate pe curbă.

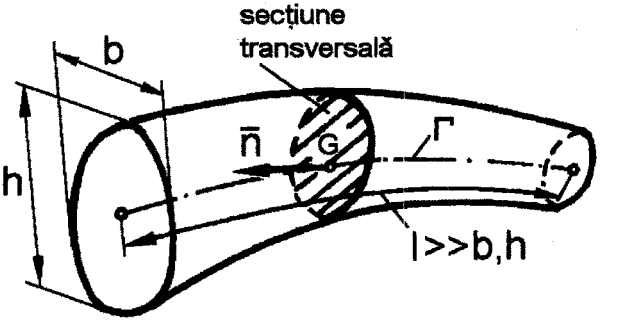


Fig.1.1

Curba generatoare este *axa barei* iar suprafaţa care se deplasează normal pe curbă este *secţiunea transversală.*

După forma axei, barele por fi drepte, curbe plane sau curbe spaţiale.

În lungul axei barei, secţiunea transversală poate fi constantă sau variabilă şi poate avea diverse forme (fig. 1.2). De asemenea, secţiunea transversală poate fi rotită în jurul axei, situaţie în care se obţine bara cu torsiune naturală.

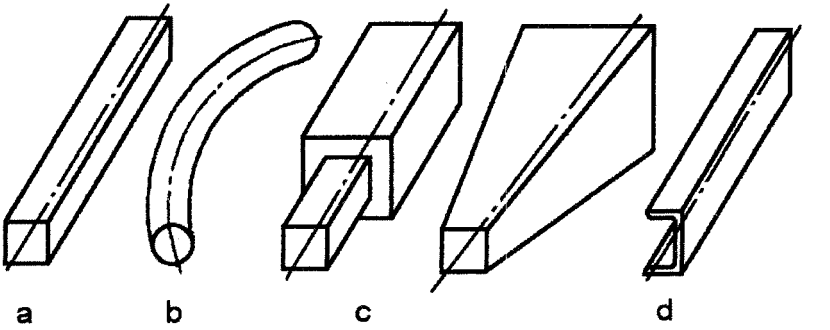


Fig. 1.2

În funcţie de tipul solicitării, corpurile din această categorie poartă diferite denumiri:

- bare, cabluri, fire, tiranţi - corpurile solicitate la întindere;
- coloane, stâlpi -corpurile solicitate la compresiune;
- grinzi - corpurile solicitate la încovoiere;
- arbori - corpurile solicitate la torsiune sau torsiune şi încovoiere.

2. Corpuri la care două dimensiuni sunt mari în comparaţie cu cea de-a treia.

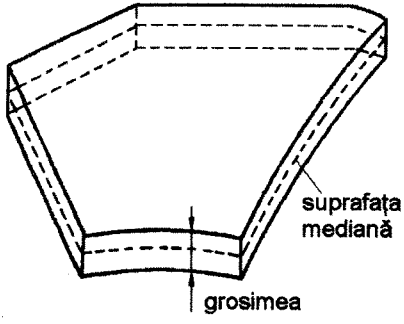


Fig. 1.3

Corpurile din această categorie se caracterizează prin forma şi dimensiunile *suprafeţei mediane* şi prin *grosime* (fig. 1.3).
Este cazul plăcilor, membranelor, cupolelor, rezervoarelor etc.

3. Corpuri la care cele trei dimensiuni sunt de acelaşi ordin de mărime.

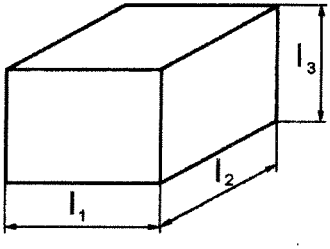


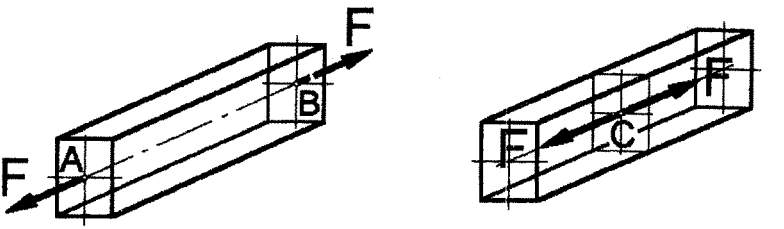
Fig. 1.4

Aceste corpuri se numesc **blocuri** sau **corpuri masive** (fig. 1.4).
Este cazul fundaţiilor, barajelor, blocurilor de matriţe, carcaselor, rolelor de rulmenţi etc.

1.4. Clasificarea forţelor

În rezistenţa materialelor ca şi în mecanică, forţele (având punct de aplicaţie, mărime direcţie şi sens) pot fi reprezentate prin vectori. Proprietatea de *vectori alunecători*, folosită în mecanică, nu mai poate fi utilizată în rezistenţa materialelor, din cauza deformabilităţii corpurilor.

În acest sens, să considerăm un corp oarecare supus acţiunii a două forţe egale şi de sens contrar F, având punctele de aplicaţie pe acelaşi suport, în A şi B (fig. 1.5a).



a) b)

Fig.1.5

Sub acţiunea forţelor F, în echilibru, corpul se deformează, iar punctele A şi B se vor depărta. Presupunem acum că vectorii F sunt alunecători şi că punctele de aplicaţie se confundă în C (fig 1.5b). În acest caz, forţele F sunt în echilibru fără a deforma corpul, în această situaţie fenomenul fizic iniţial fiind complet schimbat. *Rezultă că în rezistenţa materialelor forţele sunt* ***vectori legaţi****, cu punctele de aplicaţie bine definite.*

Piesele care compun o maşină, o instalaţie sau o construcţie, prin rolul pe care îl îndeplinesc, sunt supuse acţiunii forţelor şi cuplurilor, care pot acţiona separat sau concomitent. Aceste forţe şi cupluri sunt numite *sarcini.*

În majoritatea cazurilor forţele (sarcinile) se aplică pe anumite porţiuni din suprafaţa exterioară a construcţiei şi poartă numele de *forţe de contur* sau forţe de suprafaţă. Forţele de contur care iau naştere în reazeme se numesc *reacţiuni* sau forţe de legătură.

Forţele distribuite în întreaga masă a corpului (greutatea proprie, forţele de inerţie, forţele electromagnetice etc.) se numesc *forţe masice.*

În rezistenţa materialelor, forţele se clasifică în forţe exterioare şi forţe interioare.

Forţele de contur şi forţele masice constituie ***forţele exterioare.***

După mărimea suprafeţei pe care se aplică, forţele (sarcinile) exterioare pot fi:

- forţe concentrate;
- forţe distribuite.

Forţele concentrate se transmit asupra construcţiei pe o suprafaţă foarte mică, teoretic considerată un punct.

Se notează de obicei cu ***F*** şi se măsoară în newtoni, N, figura 1.6.

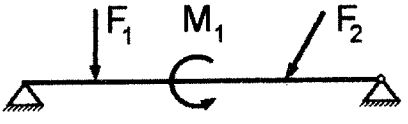


Fig. 1.6

Se pot folosi şi unităţi de măsură ca: daN, kN, kgf (1daN=10N, 1kN=1000N, 1kgf=9,81N). Momentele concentrate se notează cu ***M*** (fig.1.6) şi se măsoară în N·m (N·mm, daN·mm etc.).

Forţele distribuite sau repartizate acţionează pe o suprafaţă în cazul corpurilor din categoria plăcilor sau pe o linie în cazul barelor.

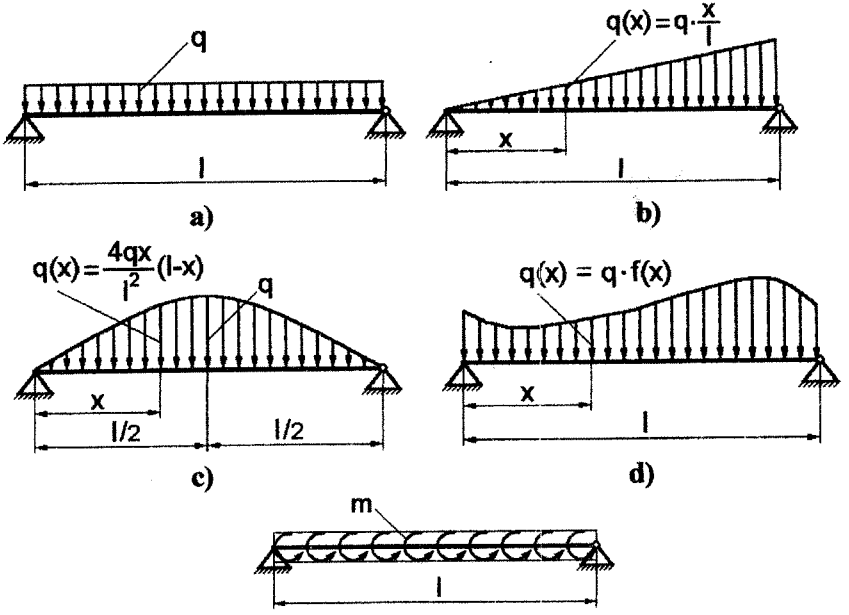


Fig. 1.7

În primul caz, intensitatea forţelor distribuite se notează cu p şi se măsoară în N/m^2 (N/mm^2 , daN/mm^2 , kgf/cm^2 etc.). În cazul barelor, intensitatea forţelor distribuite se notează cu q şi se măsoară în N/m (N/mm, kN/m, daN/mm etc.).

Intensitatea forţelor distribuite poate fi constantă (fig. 1.7a) sau variabilă liniar (fig. 1.7b), parabolic (fig. 1.7c), sau după o lege oarecare (fig. 1.7d).

Intensitatea momentelor distribuite pe bare se notează cu m şi se măsoară în N (fig. 1.7e).

După modul de acţiune în timp, forţele exterioare pot fi de două categorii:

- *forţe statice* - cele la care intensitatea creşte lent de la zero la valoarea maximă, după care rămân constante în timp (fig. 1.8a).

- *forţe dinamice* - cele la care intensitatea variază în timp.

Forţele dinamice pot fi *aplicate prin şoc* în cazul în care intervin brusc cu întreaga lor intensitate (fig. 1.8b), sau pot fi *variabile* când intensitatea variază între o valoare maximă şi una minimă în intervale mici de timp, de un număr mare de ori (fig. 1.8c).

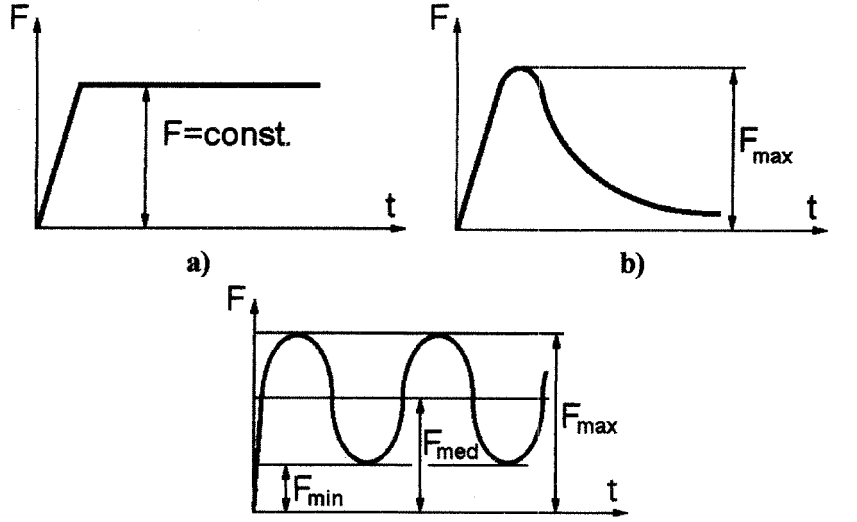


Fig. 1.8

Forţele interioare sunt acele forţe care apar în interiorul corpurilor ca urmare a acţiunii forţelor exterioare (sarcinilor).

1.5 Materiale utilizate

În construcţia sistemelor mecanice (maşini, utilaje, instalaţii) se utilizează o mare varietate de materiale, cu caracteristici fizico-mecanice diverse. Dintre cele mai des folosite amintim: oţelul, fonta, arama, bronzul, alama, aluminiul şi alte diferite metale şi aliaje, materiale plastice, compozite, ceramice, materiale textile, pielea, cauciucul, lemnul, sticla ş.a.

În general nu există un material unic pentru un anumit scop. De aceea, alegerea optimă a materialelor se face ţinând seama de condiţiile de utilizare, de solicitările existente, de posibilităţile şi condiţiile de prelucrare, de seria de fabricaţie şi nu în ultimul rând de preţul de cost.

Materialele utilizate se clasifică după mai multe criterii:

a) după modul de obţinere:

- *materiale naturale*, (ex. lemnul);
- *materiale artificiale*, ale căror proprietăţi depind de modul de fabricare (majoritatea materialelor).

b) după structură:

- *materiale anorganice*:
  - *materiale amorfe*, caracterizate printr-o orientare neregulată a atomilor în masa lor (sticla, cauciucul ş.a.);
  - *materiale cristaline*, caracterizate printr-o orientare regulată a atomilor după anumite reţele spaţiale (ex. unele pietre artificiale);
  - *materiale policristaline*, compuse din cristale de diferite mărimi orientate oricum în interiorul corpului (majoritatea metalelor);
  - *materiale formate din conglomerate*, alcătuite din corpuri de mărimi diferite legate între ele.
- *materiale organice*, cu o structură extrem de variată, alcătuite din celule grupate în ţesuturi, orientate după anumite direcţii.

c) după omogenitate (variaţia compoziţiei şi structurii):

• *materiale omogene*, cele care au aceeaşi compoziţie şi structură în toate punctele corpului;

• *materiale neomogene*, cele la care compoziţia şi structura diferă de la un punct la altul al corpului.

d) după proprietăţile manifestate într-un punct pe diferite direcţii:

• *materiale izotrope*, cele care au într-un punct aceleaşi proprietăţi pe toate direcţiile (ex. oţelul turnat);

• *materiale anizotrope*, cele care au proprietăţi diferite pe diferite direcţii într-un punct al corpului (ex. lemnul, materialele compozite etc.).

e) după comportarea în urma încetării acţiunii forţelor exterioare:

• *materiale elastice*, cele care revin la forma şi dimensiunile iniţiale după îndepărtarea acţiunii;

• *materiale elasto-plastice*, cele care revin parţial la forma şi dimensiunile iniţiale după încetarea acţiunii forţelor, rămânând cu anumite deformaţii permanente;

• *materiale plastice*, cele care îşi păstrează forma şi dimensiunile dobândite ca urmare a acţiunii forţelor (ex. plumbul).

Practic nu există materiale perfect elastice sau perfect plastice, dar pentru majoritatea materialelor, în anumite limite ale forţelor exterioare, se poate admite o comportare perfect elastică.

f) după mărimea deformaţiei înainte de rupere:

• *materiale ductile* (sau *tenace*), cele la care ruperea este precedată de deformaţii plastice mari (ex. oţelul moale);

• *materiale fragile* (sau *casante*), cele care au deformaţii mici înainte de rupere (ex. fonta, materialele ceramice, sticla ş.a.).

g) după modul de comportare la întindere şi la compresiune:

• *materiale cu o comportare simetrică*, cele care au aproximativ aceeaşi comportare la întindere şi la compresiune (ex. oţelul, lemnul);

• *materiale cu o comportare nesimetrică*, cele care se comportă diferit la tracţiune şi la compresiune (ex. fonta ş.a).

2. NOŢIUNI FUNDAMENTALE ALE REZISTENŢEI MATERIALELOR

2.1. Aspectul static al problemelor de rezistenţa materialelor

2.1.1. Tipuri de reazeme. Calculul analitic al reacţiunilor

Legăturile mecanice ideale (fără frecare) ale elementelor de rezistenţă se numesc *reazeme*. Acestea au rolul de a limita posibilităţile de mişcare ale corpului rezemat. Forţele de legătură care se dezvoltă în rezeme se numesc *reacţiuni*; ele sunt reprezentate de forţe aplicate în punctele de rezemare pe direcţiile pe care sunt împiedicate deplasările şi prin momente, dacă sunt împiedicate rotirile.

Tipurile principale de reazeme, utilizate în rezistenţa materialelor la elaborarea modelelor de calcul, sunt:

- rezemul simplu;
- rezemul articulat;
- reazemul încastrat (înţepenit).

În tabelul 2.1 se prezintă schematizarea reazemelor şi a reacţiunilor corespunzătoare.

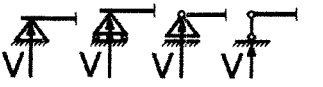
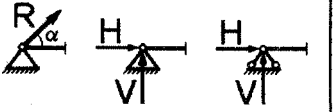
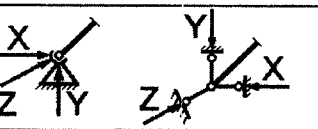
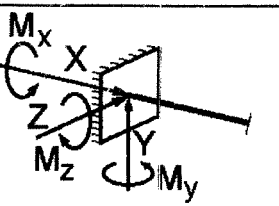
Reazemul simplu, sau rezemul articulat mobil, nu permite deplasarea relativă prin translaţie a corpurilor aflate în contact (piesă - reazem), după direcţia normalei la planul tangent al acestor corpuri în punctul de contact. Rezultă că acestui tip de reazem îi corespunde o singură forţă de legătură (reacţiune), de mărime necunoscută (notată *H, X, R* etc.), dar cu punctul de aplicaţie şi direcţia cunoscute.

Reazemul articulat împiedică deplasarea prin translaţie a corpului rezemat (a piesei) după orice direcţie în punctul de rezemare, rotirile fiind permise după orice axă.

În cazul articulației plane (cilindrice) se dezvoltă o forță de reacțiune R, ce acționează după o direcție oarecare, introducând în calcule două necunoscute: R și α, sau componentele sale notate H și V sau X și Y. În articulația spațială (sferică) apar ca reacțiuni componentele X, Y și Z ale forței de legătură R.

Reazemul încastrat sau înțepenit împiedică orice translație și orice rotație, deci suprimă șase grade de libertate. În consecință, reacțiunile sunt reprezentate de o forță F și un moment M. Așadar, într-o încastrare plană apar trei necunoscute (H, V și M) iar într-o încastrare spațială, șase necunoscute (X, Y, Z, M_x, M_y, M_z).

Tabelul 2.1.

Tipul de reazem		Schematizarea reazemului și reacțiunile corespunzătoare	Numărul de necunoscute
Reazem simplu			1 (V)
Articulație	plană (cilindrică)		2 (R și α) sau (V și H)
	spațială (sferică)		3 (X, Y, Z)
Încastrare	plană		3 (H, V, M)
	spațială		6 (X, Y, Z, Mx, My, Mz)

Mărimile reacțiunilor, necunoscute în prima fază a rezolvării problemelor de rezistență, se determină, în funcție de sarcini, cu ajutorul **ecuațiilor de echilibru**.

Un corp se află în echilibru dacă într-un punct oarecare din spaţiu, torsorul sistemului de forţe care acţionează asupra corpului (inclusiv reacţiunile din reazeme), este nul:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0, \qquad \vec{M} = \sum \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) = 0 . \tag{2.1}$$

Proiectând expresiile (2.1) pe axele unui reper cartezian se obţin ecuaţiile scalare care exprimă echilibrul corpului.

În cazul unui *sistem spaţial de forţe*, echilibrul se exprimă prin şase ecuaţii scalare:

- trei ecuaţii de proiecţii de forţe:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \tag{2.2}$$

-trei ecuaţii de momente axiale:

$$\sum M_{ix} = 0; \quad \sum M_{iy} = 0; \quad \sum M_{iz} = 0. \tag{2.3}$$

În cazul unui *sistem de forţe coplanare*, echilibrul se exprimă prin trei ecuaţii scalare, ce pot fi scrise în trei variante.

a) Două ecuaţii de proiecţii de forţe şi o ecuaţie de momente faţă de un pol oarecare din plan:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_{iz} = 0. \tag{2.4}$$

b) O ecuaţie proiecţie de forţe şi două ecuaţii de momente faţă de două puncte oarecare din plan (1 şi 2):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum M_{iz\,1} = 0; \quad \sum M_{iz\,2} = 0; \tag{2.5}$$

cu condiţia ca direcţia x pe care se face proiecţia de forţe, să nu fie direcţia perpendiculară pe dreapta 1-2.

Proiecţia de forţe pe direcţia perpendiculară pe dreapta 1-2, fie ea y, poate fi folosită ca o relaţie de verificare.

c) Trei ecuaţii de momente faţă de trei puncte oarecare din plan (1, 2 şi 3):

$$\sum M_{iz\,1} = 0; \quad \sum M_{iz\,2} = 0; \quad \sum M_{iz\,3} = 0; \tag{2.6}$$

cu condiţia ca cele trei puncte să nu fie coliniare.

Pentru verificare, în acest caz se pot scrie ecuaţiile de proiecţii de forţe.

Pentru ca o ecuaţie de momente să conţină un număr mai mic de necunoscute, este indicat ca polul să fie ales chiar într-un reazem; în acest caz momentul forţelor de reacţiune din reazemul respectiv va fi nul.

Atât în plan cât şi în spaţiu se pot scrie o infinitate de ecuaţii de echilibru, dar numai trei, respectiv şase dintre acestea, sunt independente. Restul sunt combinaţii liniare şi pot fi folosite ca ecuaţii de verificare.

În funcţie de configuraţia sistemului de forţe, anumite ecuaţii de echilibru sunt identităţi $0\equiv 0$ şi deci, uneori se pot scrie efectiv un număr mai mic de ecuaţii decât cele trei în plan, respectiv şase în cazul spaţial.

Sarcinile distribuite după o lege oarecare, sunt luate în considerare la scrierea ecuaţiilor de echilibru prin intermediul forţelor concentrate elementare.

Astfel, în cazul unei forţe distribuite pe un segment de dreaptă *AB*, de intensitate *q(x)*, variabilă după o lege oarecare, figura 2.1, fiecărui element de lungime $dx \to 0$ îi corespunde o forţă concentrată elementară

$$dF = q(x)\cdot dx\,. \tag{2.7}$$

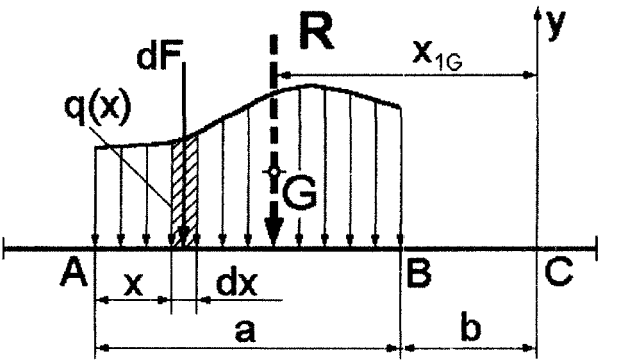


Fig. 2.1

În ecuaţiile de echilibru, sarcina distribuită pe lungimea *AB* se va regăsi prin termenii:

$$\sum F_{iy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cdots \int_0^a q(x)dx \cdots = 0; \tag{2.8}$$

$$\sum M_{iC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cdots \int_0^a q(x)(a+b-x)dx \cdots = 0. \tag{2.9}$$

În mod similar se procedează şi în cazul barelor curbe, considerând că pe o lungime de arc $ds \to 0$ acţionează o forţă concentrată elementară

$$dF = q(\alpha) \cdot ds. \qquad (2.10)$$

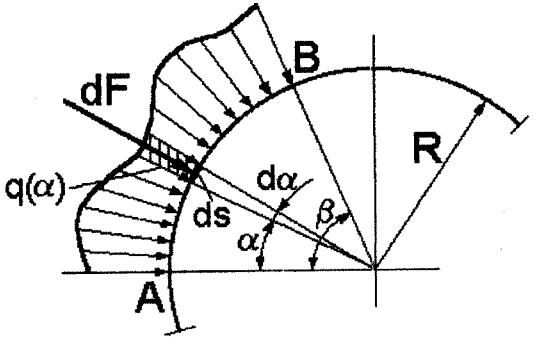


Fig. 2.2

Dacă axa geometrică a barei este circulară, figura 2.2, calculele sunt mai simple în coordonate polare ($ds = R \cdot d\alpha$):

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cdots \int_0^{\beta} q(\alpha) \cos\alpha \cdot R d\alpha \cdots = 0; \qquad (2.11)$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cdots \int_0^{\beta} q(\alpha) \sin\alpha \cdot R d\alpha \cdots = 0; \qquad (2.12)$$

$$\sum M_{iA} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cdots \int_0^{\beta} q(\alpha) R \sin\alpha \cdot R d\alpha \cdots = 0. \qquad (2.13)$$

În cazul particular al barelor drepte încărcate cu sarcini distribuite uniform sau liniar, ecuaţiile de echilibru se pot scrie simplu şi rapid dacă se are în vedere interpretarea geometrică a integralelor din expresiile (2.8) şi (2.9): *sarcina distribuită este echivalentă cu o forţă rezultantă* ***R*** *având modulul numeric egal cu suprafaţa de reprezentare a distribuţiei sarcinii şi suportul trecând prin centrul de greutate al acesteia* (fig. 2.1. şi 2.3).

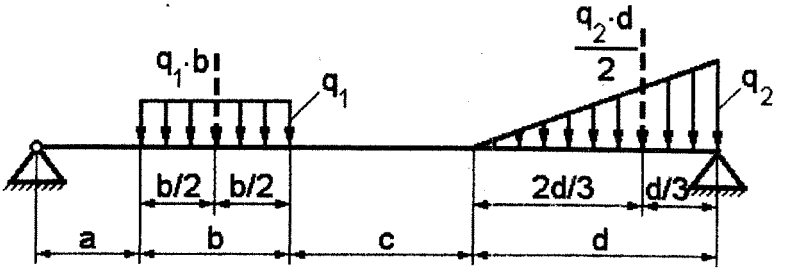


Fig. 2.3

Un sistem elastic (bară, ansamblu de bare) poate fi rezemat pe o combinaţie oarecare a celor trei tipuri de reazeme.

În funcţie de raportul dintre numărul total al reacţiunilor r şi cel al ecuaţiilor de echilibru static e, se pot distinge următoarele situaţii:

a) **r = e** *sistem static determinat*; toate reacţiunile se determină din ecuaţiile de echilibru static (max. 3 în plan şi max. 6 în spaţiu).

b) **r > e** *sistem static nedeterminat*; se notează $n = r - e$, ordinul de nedeterminare. Pentru determinarea reacţiunilor se completează ecuaţiile de echilibru static cu n ecuaţii din studiul deformaţiilor, studiu ce poate fi făcut geometric sau energetic.

c) **r < e** sistemul de bare devine un *mecanism*.

2.1.2. Eforturi. Metoda secţiunilor. Tipuri de solicitări

Chiar dacă un corp nu este solicitat de forţe exterioare, în interiorul său există forţe care-i conservă forma, numite *forţe de coeziune*.

Dacă asupra unui corp acţionează un sistem de sarcini în echilibru, acesta se va deforma; în interiorul său iau naştere forţe suplimentare de interacţiune între particule, care se opun acţiunii forţelor exterioare şi care caută să menţină corpul în starea iniţială. Aceste *forţe interioare suplimentare* sunt cele care prezintă interes în rezistenţa materialelor.

Atât forţele de coeziune cât şi forţele interioare suplimentare îşi fac echilibrul în interiorul corpurilor formând fiecare în parte sisteme de forţe echivalente cu zero. Spre deosebire de forţele de coeziune care există atât timp cât există corpul, forţele interioare suplimentare apar numai în momentul acţiunii sarcinilor şi se anulează când sarcinile încetează să mai acţioneze.

În rezistenţa materialelor este necesar să stabilim existenţa forţelor interioare suplimentare, să le punem în evidenţă, să calculăm valorile lor şi să determinăm influenţa acestora asupra comportării corpului.

Pentru a pune în evidenţă forţele interioare suplimentare se apelează la legea a III-a a lui Newton, a acţiunii şi reacţiunii. Deoarece această lege presupune existenţa a cel puţin două corpuri fizice aflate în contact, rezultă că trebuie să secţionăm imaginar corpul în două părţi distincte, operaţie prin care forţele interioare suplimentare sunt transpuse în categoria forţelor exterioare. Această metodă, proprie rezistenţei materialelor, se numeşte ***metoda secţiunilor***.

În cele ce urmează ne vom ocupa de corpurile din prima categorie, şi anume de **bare**.

Se consideră o bară pe care acţionează un sistem de forţe în echilibru F_1, F_2, . . . , F_n , figura 2.4. Pentru a pune în evidenţă forţele interioare suplimentare dintr-o secţiune transversală oarecare, se consideră un plan $[P]$ ce conţine această secţiune şi care taie imaginar bara în două părţi distincte *I* şi *II*. Aceste părţi se află în contact în toate punctele secţiunii, dezvoltându-se deci forţe suplimentare de interacţiune, egale şi de sens contrar.

Torsorul de reducere al forţelor interioare suplimentare de legătură dintr-o secţiune, faţă de centrul ei de greutate, este format dintr-o forţă rezultantă $\boldsymbol{R}$ şi un moment rezultant $\boldsymbol{M}$. Vectorii $\boldsymbol{R}$ şi $\boldsymbol{M}$ de pe cele două feţe ale secţiunii, sunt egali şi de sens contrar, conform principiului acţiunii şi reacţiunii.

Deoarece bara în ansamblu, înainte de secţionare, se afla în echilibru, rezultă că şi fiecare parte din ea, *I* respectiv *II*, trebuie să se afle în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare de pe acea parte şi a forţelor interioare suplimentare din secţiunea făcută.

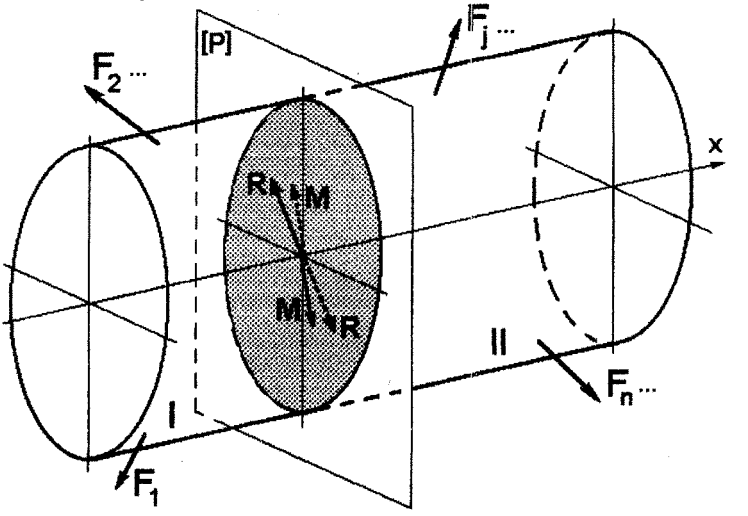


Fig. 2.4

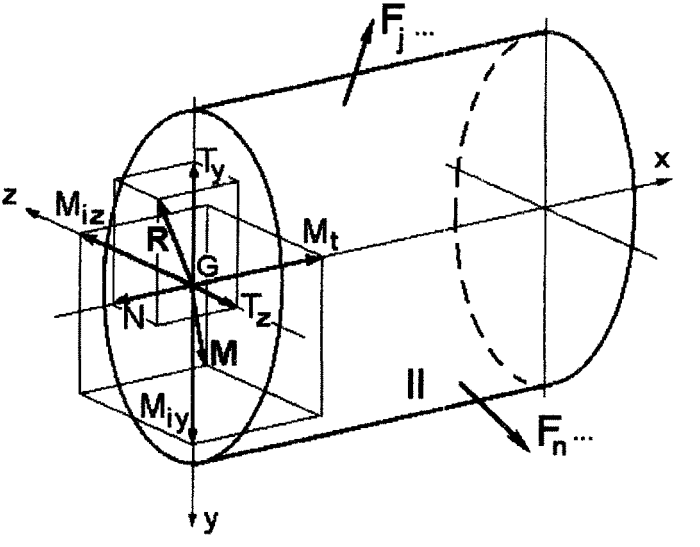


Fig. 2.5

Rezultă deci că îndepărtând imaginar una din părţile obţinute prin secţionare precum şi forţele care acţionează asupra acesteia şi scriind ecuaţiile de echilibru pentru partea rămasă, se poate determina mărimea, direcţia şi sensul pentru ***R*** şi ***M***.

Vectorii ***R*** şi ***M*** se pot descompune pe axele unui sistem triortogonal *Gxyz* asociat secţiunii (cu axa *x* perpendiculară pe planul acesteia şi axele *Gy, Gz* - axe de inerţie principale centrale), în *şase componente* numite **eforturi** (fig. 2.5), notate şi denumite astfel:

N - *forţă axială* (normală);

T_y, T_z - *forţe tăietoare*;

M_t - *moment de torsiune (răsucire)*;

M_{iy}, M_{iz} - *momente încovoietoare*.

Forţele N, T_y şi T_z de pe faţa din dreapta secţiunii (fig. 2.5), sunt pozitive dacă au sensul contrar axelor de coordonate, iar momentele M_t, M_{iy} şi M_{iz} sunt pozitive dacă au acelaşi sens cu al axelor de coordonate. Eforturile de pe faţa din stânga sunt considerate pozitive dacă au sensul contrar celor definite pozitive pe faţa din dreapta.

Forţele şi momentele care reprezintă eforturile de pe faţa dreaptă a secţiunii, constituie un sistem echivalent cu sistemul forţelor exterioare ce acţionează asupra porţiunii de bară situată la stânga secţiunii. În mod similar, forţele şi momentele care reprezintă eforturile de pe faţa stângă a secţiunii, constituie un sistem echivalent cu sistemul forţelor exterioare ce acţionează asupra porţiunii de bară situată la dreapta secţiunii.

Pe baza metodei secţiunilor şi a îndeplinirii condiţiilor de echilibru pentru fiecare parte din bara supusă acţiunii sarcinilor, eforturile menţionate se definesc astfel:

- ***Forţa axială N(x)***, *într-o secţiune transversală oarecare* ***x*** *a unei bare, este egală cu suma algebrică a proiecţiei tuturor forţelor exterioare care acţionează pe porţiunea de bară situată la stânga sau la dreapta secţiunii, pe direcţia tangentei la axa geometrică a barei în acea secţiune;*

- ***Forţa tăietoare $T_y(x)$, $T_z(x)$,*** *într-o secţiune transversală oarecare* ***x*** *a unei bare, este egală cu suma algebrică a proiecţiei tuturor forţelor exterioare care acţionează pe porţiunea de bară situată la stânga sau la dreapta secţiunii, pe o direcţie perpendiculară pe tangenta la axa geometrică a barei în acea secţiune, Gy respectiv Gz;*

- ***Momentul de torsiune*** $M_t(x)$ *într-o secţiune transversală oarecare* x *a unei bare, este egal cu suma algebrică a proiecţiei tuturor momentelor exterioare (produse de forţele şi momentele concentrate şi distribuite) care acţionează pe porţiunea de bară situată la stânga sau la dreapta secţiunii, pe direcţia tangentei la axa geometrică a barei în acea secţiune;*

- ***Momentul încovoietor*** $M_{iy}(x)$, $M_{iz}(x)$, *într-o secţiune transversală oarecare* x *a unei bare, este egal cu suma algebrică a proiecţiei tuturor momentelor exterioare (produse de forţele şi momentele concentrate şi distribuite) care acţionează pe porţiunea de bară situată la stânga sau la dreapta secţiunii, pe o direcţie perpendiculară pe tangenta la axa geometrică a barei în acea secţiune, Gy respectiv Gz.*

Un caz particular des întâlnit în practică, este cel al barelor solicitate de *forţe coplanare*, situate de exemplu în planul xGy. În această situaţie, într-o secţiune oarecare a barei pot să apară numai trei eforturi şi anume:

- *forţa axială,* N;
- *forţa tăietoare,* $T = T_y$;
- *momentul încovoietor,* $M_i = M_{iz}$.

În figura 2.6 se prezintă convenţia de semne a eforturilor N, T şi M_i pentru cazul forţelor exterioare coplanare, în concordanţă cu cele prezentate mai sus.

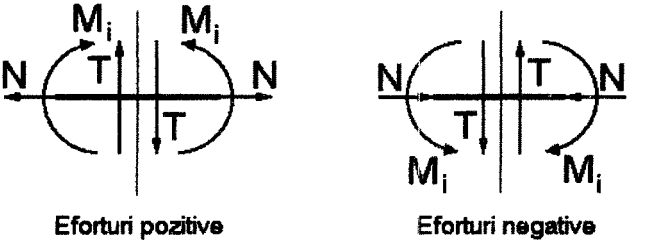


Fig. 2.6

Se poate observa că forţa axială şi momentul încovoietor sunt eforturi *simetrice* faţă de secţiune, iar forţa tăietoare este un efort *antisimetric* faţă de secţiune.

În funcție de numărul eforturilor dintr-o secțiune, solicitările produse de forțele exterioare pot fi de două categorii:

- solicitări simple;
- solicitări compuse.

Solicitarea simplă se produce când în centrul de greutate al secțiunii apare un singur efort. După felul efortului, solicitările simple sunt:

- *întinderea* sau *compresiunea*, când în secțiune există numai forța axială N;
- *forfecarea*, când există numai forța tăietoare T;
- *răsucirea* (*torsiunea*), când există numai momentul de torsiune M_t;
- *încovoierea*, când există numai momentul încovoietor M_{iy} sau M_{iz}.

Solicitarea compusă se produce în cazul în care în secțiunea transversală a barei apar două sau mai multe eforturi.

În general, eforturile au valori diferite de la o secțiune la alta. Pentru efectuarea calculelor de rezistență și de rigiditate este necesar să se cunoască variația eforturilor în lungul axei geometrice a barei și să se stabilească valorile maxime ale acestora, precum și poziția secțiunii în care se produc. În acest scop se trasează graficele de variație ale funcțiilor eforturilor în raport cu poziția secțiunii transversale în lungul axei barei, numite ***diagrame de eforturi***.

2.1.3. Relaţii diferenţiale între eforturi şi între eforturi şi sarcini

Între funcţiile eforturilor, precum şi între funcţiile eforturilor şi ale sarcinilor (încărcărilor) există anumite relaţii diferenţiale, a căror cunoaştere uşurează trasarea corectă a diagramelor de eforturi.

2.1.3.1. Relaţii diferenţiale în cazul barelor drepte solicitate de forţe coplanare

Se consideră o bară dreaptă, figura 2.7a, asupra căreia acţionează în planul *xOy* un sistem de forţe în echilibru, printre care şi o sarcină distribuită după o lege oarecare *q(x)*. Din bară se izolează un element de lungime *dx→0*, figura 2.7b, încărcat cu sarcina distribuită *q(x)*, cu componentele $q_n(x)$ pe direcţia normalei şi $q_t(x)$ pe direcţia tangentei la axa geometrică a barei, care pe lungimea elementară *dx* pot fi considerate uniform distribuite.

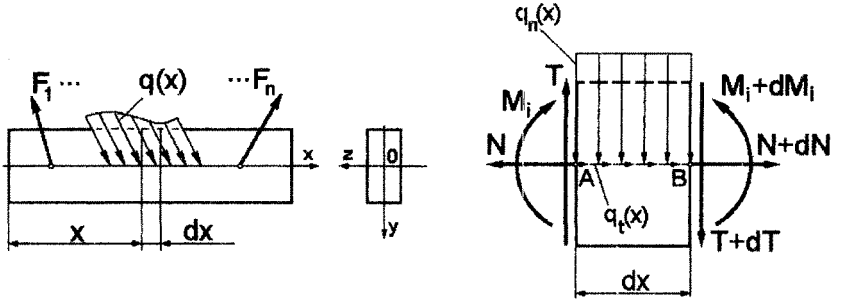


Fig. 2.7

Pe feţele din stâga şi din dreapta elementului izolat din bară acţionează eforturile *N, T* şi M_i, respectiv $N + dN$, $T + dT$, $M_i + dM_i$, ca efect al acţiunii părţilor îndepărtate.

Elementul izolat din figura 2.7b trebuie să se afle în echilibru şi deci se pot scrie următoarele ecuaţii:

$$\sum X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad (N+dN)+q_t(x)\cdot dx-N=0; \tag{2.14}$$

$$\sum Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad (T+dT)+q_n(x)\cdot dx-T=0; \tag{2.15}$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cdot dx+M_i-q_n(x)\cdot dx\cdot dx/2-(M_i+dM_i)=0. \tag{2.16}$$

Dacă în relaţiile de mai sus se reduc termenii asemenea şi se neglijează termenul $q_n(x)\cdot(dx)^2/2$, care este un infinit mic de ordin superior, rezultă:

$$\boxed{\frac{dN(x)}{dx} = -q_t(x)} \tag{2.17}$$

$$\boxed{\frac{dT(x)}{dx} = -q_n(x)} \tag{2.18}$$

$$\boxed{\frac{dM_i(x)}{dx} = T(x)} \tag{2.19}$$

Ţinând cont de relaţiile (2.18) şi (2.19), se poate scrie

$$\frac{d^2M_i(x)}{dx^2} = -q_n(x)\,. \tag{2.20}$$

Analizând relaţiile diferenţiale obţinute, se pot desprinde următoarele *concluzii*:

- derivata funcţiei de variaţie a forţei axiale $N(x)$, respectiv a forţei tăietoare $T(x)$, este egală cu funcţia de variaţie a intensităţii sarcinii distribuite pe direcţia tangentei la axa geometrică a barei $q_t(x)$, respectiv pe direcţia normalei la aceasta $q_n(x)$, luate cu semn schimbat;
- derivata funcţiei de variaţie a momentului încovoietor $M_i(x)$ în raport cu abscisa secţiunii este egală cu funcţia de variaţie a forţei tăietoare $T(x)$;
- dacă $q(x) = 0$ pe o porţiune de bară, adică acea porţiune nu este încărcată cu forţă distribuită, atunci forţele axiale şi cele tăietoare sunt constante iar momentul încovoietor variază liniar;

- dacă $q_t(x)$ şi $q_n(x)$ sunt uniform repartizate pe o porţiune de bară, atunci forţele axiale şi cele tăietoare au o variaţie liniară, iar momentul variază după o funcţie parabolică de gradul doi;
- pe orice porţiune a barei, funcţiile forţelor axiale $N(x)$ şi tăietoare $T(x)$ sunt cu un grad mai mare decât funcţia polinomială a sarcinii $q(x)$, iar cea a momentului încovoietor $M(x)$ cu un grad mai mare decât a forţei tăietoare $T(x)$;
- momentul încovoietor are valori extreme în secţiunile unde forţa tăietoare (derivata momentului) se anulează, iar forţa tăietoare are valori extreme în secţiunile unde intensitatea sarcinii $q_n(x)$ trece prin zero;
- dacă pe o porţiune a barei forţa tăietoare este pozitivă, atunci momentul încovoietor este crescător, iar dacă forţa tăietoare este negativă, momentul încovoietor este descrescător.

2.1.3.2. Relaţii diferenţiale pentru barele curbe plane solicitate de forţe coplanare

Se consideră o bară curbă plană încărcată cu un sistem de forţe coplanare, concentrate şi distribuite, în echilibru. În mod similar cu cele arătate în paragraful anterior, se izolează din bară un element de lungime $ds \to 0$, fig. 2.8, delimitat de două secţiuni trans-versale ce fac între ele un unghi elementar $d\varphi \to 0$. Acest element de bară trebuie să se afle în echilibru sub acţiunea eforturilor secţionale şi a forţelor distribuite, considerate uniforme pe lungimea ds.

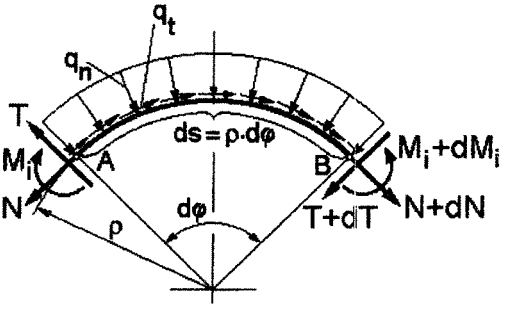


Fig. 2.8

Se pot scrie următoarele ecuaţii de echilibru:

- suma proiecţiilor forţelor pe direcţia efortului N, (2.21)

$$N - q_t ds\cos\frac{d\varphi}{2} + q_n ds\sin\frac{d\varphi}{2} - (N + dN)\cos d\varphi + (T + dT)\sin d\varphi = 0$$

- suma proiecţiilor forţelor pe direcţia efortului T, (2.22)

$$T - q_n ds\cos\frac{d\varphi}{2} - q_t ds\sin\frac{d\varphi}{2} - (N + dN)\sin d\varphi - (T + dT)\cos d\varphi = 0$$

- suma momentelor faţă de punctul B, (2.23)

$$M_i + T\rho\sin d\varphi - N\rho(1 - \cos d\varphi) - q_n ds\rho\sin\frac{d\varphi}{2} + q_t ds\rho\left(1 - \cos\frac{d\varphi}{2}\right) - (M_i + dM_i) = 0$$

unde $ds = \rho \cdot d\varphi$ este lungimea elementului de arc cu raza de curbură ρ.

Deoarece $d\varphi \to 0$, putem face aproximaţiile: $\cos d\varphi \cong 1$; $\sin d\varphi \cong 0$.

Împărţind fiecare ecuaţie prin ds, rezultă următoarele relaţii diferenţiale:

$$\boxed{\frac{dN}{ds} = -q_n + \frac{T}{\rho}} \qquad (2.24)$$

$$\boxed{\frac{dT}{ds} = -q_t - \frac{N}{\rho}} \qquad (2.25)$$

$$\boxed{\frac{dM_i}{ds} = T} \qquad (2.26)$$

Trecând la limită, pentru $\rho \to \infty$, se obţin relaţiile diferenţiale (2.17), (2.18), (2.19) stabilite pentru barele drepte.

2.1.4. Trasarea diagramelor de eforturi

Elementul esenţial în rezolvarea unei probleme de rezistenţa materialelor, îl reprezintă cunoaşterea funcţiilor de variaţie a eforturilor în bare şi reprezentarea grafică a acestora sub forma *diagramelor de eforturi.*

Metodologia de construire a acestor diagrame este prezentată mai jos.

❶ Se calculează reacţiunile.

❷ Se împarte bara în subdomenii numite regiuni (intervale, câmpuri), ce reprezintă porţiuni de pe lungimea barei pe care funcţia efortului are aceeaşi expresie. Având în vedere definiţiile de calcul ale eforturilor, rezultă că punctele care delimitează regiunile de pe axa barei sunt constituite din:

- punctele de aplicaţie ale forţelor şi momentelor concentrate;
- punctele de începere şi terminare a acţiunii sarcinilor distribuite;
- punctele de schimbare bruscă a direcţiei axei barei;
- punctele de schimbare bruscă a razei de curbură a axei barei;
- punctele de schimbare bruscă a secţiunii transversale.

În figura 2.9 se prezintă o bară cu nouă regiuni în care se regăsesc situaţiile enumerate mai sus.

❸ În interiorul fiecărei regiuni se execută o secţiune curentă $x_1, x_2, \ldots x_n$ care se poziţionează (cotează) convenabil faţa de un punct caracteristic de pe axa barei (unul din capetele regiunii sau un alt punct ce separă două regiuni). În cazul barelor curbe circulare se recomandă poziţionarea în coordonate polare (de ex. regiunea G - H, fig. 2.9).

❹ Se stabileşte domeniul de definiţie pentru fiecare variabilă x_i de poziţionare a secţiunii curente, astfel încât pentru valorile x_i din domeniul de definiţie, secţiunile să se facă numai în limitele regiunii analizate.

UNIV. TEHNICĂ IAŞI
Bib. MECANICĂ
Împrumut
32437

Astfel, pentru modul de cotare din figura 2.9 domeniile de definiţie sunt: $x_1 \in (0,l_1)$; $x_2 \in (0,l_2)$; $x_3 \in (0,l_3)$; $x_4 \in (0,l_4)$; $x_5 \in (0,l_5)$; $\varphi_6 \in (0,\pi/2)$; $x_7 \in (0,l_7)$; $x_8 \in (0,l_8)$ sau $x'_8 \in (l_9,l_9+l_8)$; $x_9 \in (0,l_9)$.

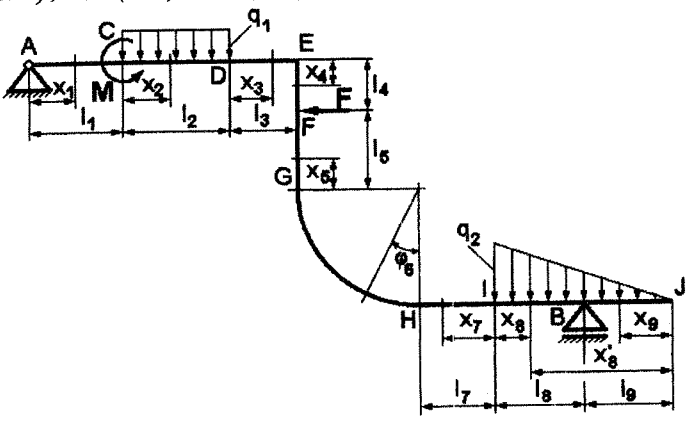


Fig. 2.9

❺ Se scriu expresiile funcţiilor de variaţie ale eforturilor, pe baza definiţiilor respective, în fiecare secţiune curentă, x_i. În vederea micşorării volumului de calcul este convenabil să se ia sarcinile de pe partea cu cele mai puţine încărcări.

❻ Se face reprezentarea grafică, la scară, a funcţiilor obţinute pe domeniile de definiţie corespunzătoare fiecărei regiuni.

Ca linii de referinţă (axe ale absciselor) pentru reprezentarea valorilor eforturilor se folosesc linii de forma axei barei.

Pentru reprezentarea grafică a eforturilor în raport cu linia de reper, se ţine seama de semnele acestora astfel:

- forţele axiale, tăietoare şi momentele de torsiune pozitive se reprezintă deasupra liniei de referinţă, iar cele negative dedesubt;

- pentru momentele încovoietoare, convenţia de reprezentare este inversă, valorile pozitive fiind reprezentate sub linia de referinţă (de partea fibrelor întinse ale barei care este încovoiată de momente pozitive); astfel, diagrama de momente încovoietoare devine asemănătoare cu bara deformată sub acţiunea forţelor.

Suprafaţa cuprinsă între graficul efortului şi linia de referinţă se haşurează pe direcţia normală la aceasta din urmă şi se marchează cu semnul efortului, $\oplus$ sau $\ominus$.

❼ Se verifică construirea acestor diagrame folosind relaţiile diferenţiale dintre eforturi şi dintre eforturi şi sarcini; verificarea se are în vedere pe tot parcursul calculului analitic precum şi la forma finală a diagramelor.

În cele ce urmează se prezintă câteva exemple referitoare la modul de trasare a diagramelor de eforturi la bare şi sisteme de bare drepte, plane şi spaţiale, precum şi la bare curbe.

2.1.4.1. Diagrame de forţe axiale

Diagramele de forţe axiale arată în ce măsură secţiunile transversale ale barei sunt solicitate la întindere sau la compresiune. Forţa axială pozitivă corespunde solicitării de întindere iar cea negativă solicitării de compresiune.

Aplicaţia 2.1. Se cere să se reprezinte diagrama forţelor axiale pentru bara din figura 2.10.

Rezolvare

Se determină reacţiunea V_A scriind ecuaţia de proiecţii de forţe pe direcţia axei barei:

$$2F-3F-F+3F+V_A=0$$

$$\Rightarrow V_A = -F.$$

Forţele axiale în cele patru regiuni ale barei sunt:

- regiunea AB; $x_1 \in (0,l_1)$;
$$N(x_1) = V_A = -F$$
- regiunea BC; $x_2 \in (0,l_2)$;
$$N(x_2) = V_A + 3F = 2F$$
- regiunea CD; $x_3 \in (0,l_3)$;
$$N(x_3) = -2F + 3F = F$$
- regiunea DE; $x_4 \in (0,l_4)$;
$$N(x_4) = -2F.$$

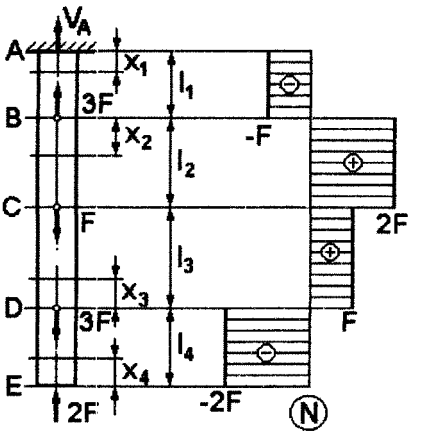


Fig. 2.10

Reprezentarea funcţiilor obţinute constituie diagrama de forţe axiale. Se observă că salturile din diagrama obţinută, sunt egale cu forţele concentrate aplicate în secţiunile respective.

Aplicaţia 2.2. Să se traseze diagrama de forţe axiale pentru bara verticală de secţiune constantă *A* şi lungime *5l* (fig. 2.11), executată dintr-un material cu greutatea specifică γ, solicitată de forţele concentrate F şi 3F, ţinând seama şi de greutatea proprie.

Rezolvare

Se determină reacţiunea V_A din ecuaţia de proiecţii de forţe pe verticală:

$$V_A - 3F - F - \gamma \cdot A \cdot 5l = 0 \qquad \Rightarrow V_A = 4F + 5\gamma Al.$$

Expresiile forţelor axiale în cele două regiuni ale barei sunt:

- regiunea AB; $x_1 \in (0,4l)$;

$$N(x_1) = V_A - \gamma \cdot A \cdot x_1$$
$$N(0) = 4F + 5\gamma Al$$
$$N(4l) = 4F + \gamma Al$$

- regiunea BC; $x_2 \in (0,l)$;

$$N(x_2) = F + \gamma \cdot A \cdot x_2$$
$$N(0) = F$$
$$N(l) = F + \gamma \cdot A \cdot l.$$

Se observă că forţa axială variază liniar, datorită acţiunii greutăţii proprii, care în cazul prezentat este o forţă uniform distribuită.

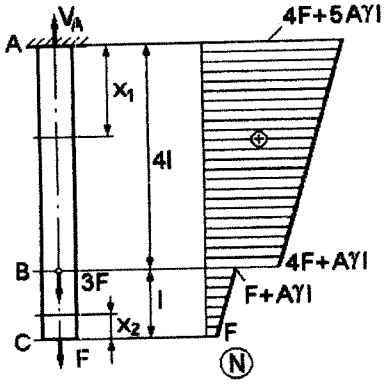


Fig. 2.11

2.1.4.2. Diagrame de momente de torsiune

Aplicaţia 2.3. Să se traseze diagrama de momente de torsiune pentru bara din figura 2.12.

Rezolvare

Deoarece bara este solocitată numai de momente de torsiune, în încastrare apare o singură reacţiune care este de asemenea un moment de torsiune. Reacţiunea se determină din ecuaţia de momente faţă de axa barei:

$$M_{tA} - 3M_t - M_t = 0 \qquad \Rightarrow M_{tA} = 4M_t.$$

Momentele de torsiune în cele două regiuni ale barei sunt:

- regiunea AB; $x_1 \in (0,l_1)$;

$M_t(x_1) = M_{tA} = 4M_t$

- regiunea BC; $x_2 \in (0,l_2)$;

$M_t(x_2) = M_{tA} - 3M_t = M_t$.

Se observă că salturile din diagrama de momente de torsiune sunt egale cu valorile momentelor concentrate ce acţionează pe bară în secţiunile corespunzătoare.

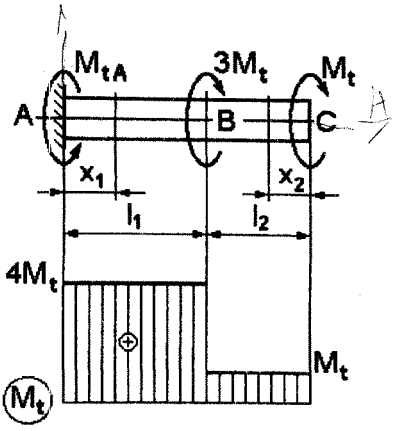


Fig. 2.12

Aplicaţia 2.4. Să se traseze diagrama de momente de torsiune pentru arborele drept din figura 2.13. Momentele de torsiune aplicate prin intermediul celor patru roţi de transmisie sunt: $M_{t1} = 160$ Nm; $M_{t2} = 80$ Nm; $M_{t3} = 300$ Nm; $M_{t4} = 60$ Nm.

Rezolvare

Se verifică dacă sub acţiunea celor patru momente de torsiune, arborele este în echilibru:

$M_{t1} + M_{t2} - M_{t3} + M_{t4} = 0 \quad \Rightarrow 160 + 80 - 300 + 60 = 0 \Leftrightarrow 0 \equiv 0.$

Momentele de torsiune în cele patru regiuni sunt:

- regiunea AB; $x_1 \in (0,a)$;

$M_t(x_1) = 0$

- regiunea BC; $x_2 \in (0,a)$;

$M_t(x_2) = M_{t1} = 160$ Nm

- regiunea CD; $x_3 \in (0,a)$;

$M_t(x_3) = M_{t1} + M_{t2} = 240$ Nm

- regiunea DF; $x_4 \in (0,2a)$;

$M_t(x_4) = - M_{t4} = - 60$ Nm.

S-a considerat că momentul de frecare din lagăre este neglijabil şi de aceea în prima regiune momentul de torsiune este nul iar lungimea ultimei regiuni este $2a$.

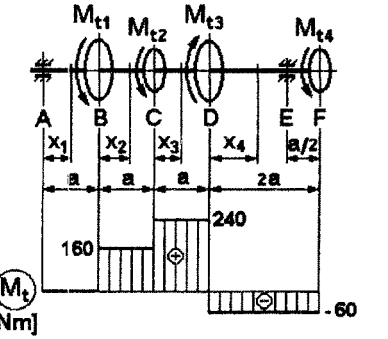


Fig. 2.13

2.1.4.3. Diagrame de forţe tăietoare şi momente încovoietoare

Aplicţia 2.5. Să se traseze diagramele de forţe tăietoare şi momente încovoietoare pentru grinda din figura 2.14, încărcată cu o forţă concentrată.

Rezolvare

Din ecuaţiile de echilibru rezultă:

$$H_A = 0;\ V_A = F\cdot\frac{b}{l};\ V_B = F\cdot\frac{a}{l}.$$

Expresiile eforturilor sunt:

- regiunea AC; $x_1 \in (0,a)$;

$$T(x_1) = V_A = F\cdot\frac{b}{l};$$

$$M_i(x_1) = V_A\cdot x_1 = F\cdot\frac{b}{l}\cdot x_1$$

- regiunea BC; $x_2 \in (o,b)$

$$T(x_2) = -V_B = -F\cdot\frac{a}{l};$$

$$M_i(x_2) = V_B\cdot x_2 = F\cdot\frac{a}{l}\cdot x_2.$$

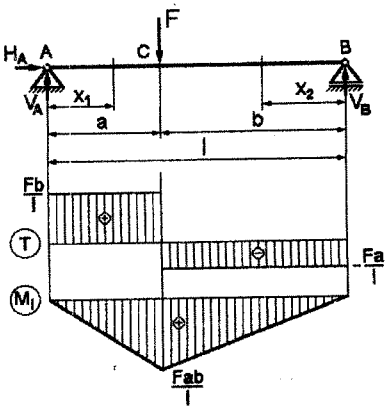


Fig. 2.14

Aplicaţia 2.6. Să se traseze diagramele de forţe tăietoare şi momente încovoietoare pentru grinda din figura 2.15, încărcată cu un moment concentrat.

Rezolvare

Reacţiunile sunt:

$$V_A = -V_B = \frac{M}{l}.$$

Expresiile eforturilor sunt:

- regiunea AC; $x_1 \in (0,a)$;

$$T(x_1) = V_A = \frac{M}{l};$$

$$M_i(x_1) = V_A\cdot x_1 = \frac{M}{l}\cdot x_1$$

- regiunea BC; $x_2 \in (o,b)$

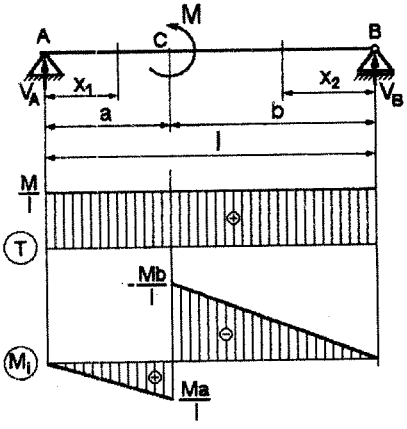


Fig. 2.15

$$T(x_2) = -V_B = \frac{M}{l};$$

$$M_i(x_2) = V_B \cdot x_2 = -\frac{M}{l} \cdot x_2.$$

Aplicaţia 2.7. Să se traseze diagramele de forţe tăietoare şi momente încovoietoare pentru grinda din figura 2.16, încărcată cu o forţă uniform distribuită.

Rezolvare

Reacţiunile sunt:

$$V_A = V_B = \frac{q \cdot l}{2}.$$

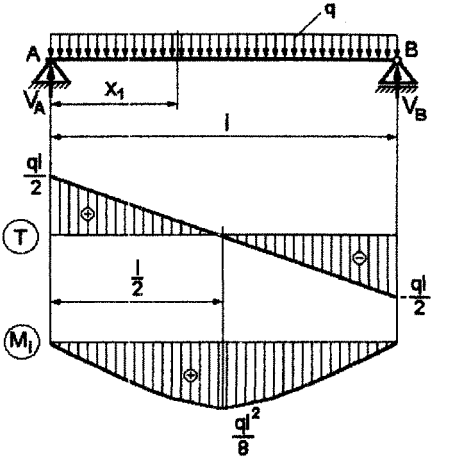


Fig. 2.16

Eforturile sunt:

- regiunea AB; $x \in (0,l)$;

$$T(x) = V_A - q \cdot x = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x;$$

$$T(0) = \frac{q \cdot l}{2}; \; T(l) = -\frac{q \cdot l}{2};$$

$$T(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}.$$

$$M_i(x) = V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2};$$

$$M_i(0) = M_i(l) = 0$$

$$M_i'(x) = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x = T(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$$

$$M_i\left(\frac{l}{2}\right) = M_{i\,max} = \frac{q \cdot l^2}{8}.$$

Aplicaţia 2.8. Să se traseze diagramele de forţe tăietoare şi momente încovoietoare pentru grinda încastrată din figura 2.17, încărcată cu o forţă distribuită uniform.

Rezolvare

Reacţiunile sunt:

$$H_B = 0; \; V_B = ql; \; M_B = -\frac{q \cdot l^2}{2}.$$

Eforturile sunt:

- regiunea AB; $x \in (0,l)$;

$T(x) = -q \cdot x$;

$T(0) = 0$; $T(l) = -ql$;

$$M_i(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2};$$

$$M_i(0) = 0;\ M_i(l) = -\frac{q \cdot l^2}{2}$$

$$M_i'(x) = -q \cdot x = T(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0,\quad M_{i\,max} = \frac{q \cdot l^2}{2}.$$

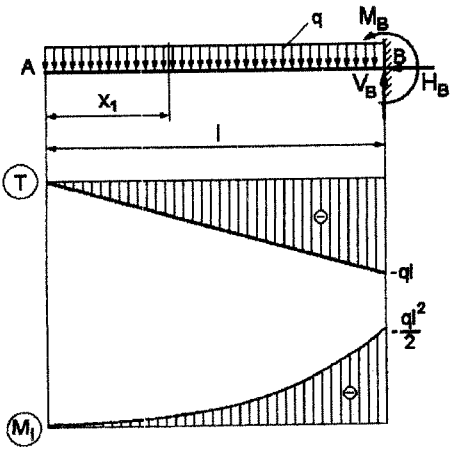


Fig. 2.17

Aplicaţia 2.9. Să se traseze diagramele de forţe tăietoare şi momente încovoietoare pentru grinda din figura 2.18, încărcată cu o forţă distribuită liniar.

Rezolvare

Pentru calculul reacţiunilor, sarcina distribuită este echivalentă cu o forţă concentrată $\frac{q \cdot l}{2}$, aplicată la distanţa $\frac{2l}{3}$ de reazemul din stânga (prin centrul de greutate al triunghiului).

Din ecuaţiile de echilibru rezultă reacţiunile:

$$V_A = \frac{q \cdot l}{6};\quad V_B = \frac{q \cdot l}{3}.$$

În secţiunea x, intensitatea sarcinii distribuite este:

$$q(x) = \frac{q \cdot x}{l}.$$

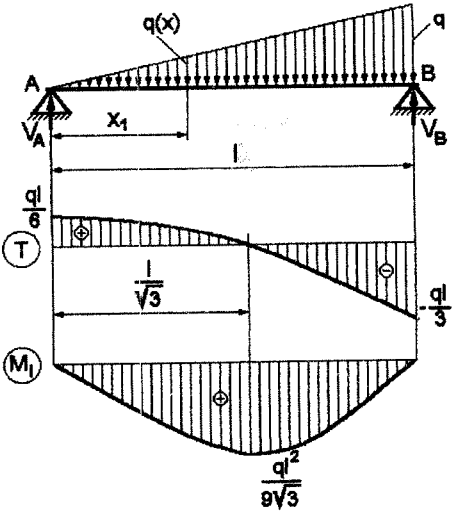


Fig. 2.18

Expresiile eforturilor sunt:
- regiunea AB; $x \in (0,l)$;

$$T(x) = V_A - \frac{q(x)\cdot x}{2} = \frac{q\cdot l}{6} - \frac{q\cdot x^2}{2l};$$

$$T(0) = \frac{q\cdot l}{6};\ T(l) = -\frac{q\cdot l}{3};$$

$$T'(x) = -\frac{q\cdot x}{l} = -q(x) = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$T(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}}\cdot$$

$$M_i(x) = V_A\cdot x - \frac{q(x)\cdot x}{2}\cdot\frac{x}{3} = \frac{q\cdot l}{6}\cdot x - \frac{q\cdot x^3}{6l};$$

$$M_i(0) = M_i(l) = 0$$

$$M_i'(x) = \frac{q\cdot l}{6} - \frac{q\cdot x^2}{2l} = T(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$M_i\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = M_{i\,max} = \frac{q\cdot l^2}{9\sqrt{3}}\cdot$$

Aplicaţia 2.10. Să se traseze diagramele de forţe tăietoare şi momente încovoietoare pentru grinda din figura 2.19, încărcată cu o forţă distribuită parabolic.

Rezolvare

Într-o secţiune oarecare situată la distanţa t de reazemul din stânga, intensitatea sarcinii este $q(t) = at^2 + bt + c$. Coeficienţii a, b şi c se determină impunând condiţiile:

$$q(0) = 0;\ q'(0) = 0;\ q(l) = q.$$

Se obţine: $q(t) = q\frac{t^2}{l^2}\cdot$

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$\sum M_A = 0;\ \int_0^l t\cdot q(t)dt - V_B\cdot l = 0;$$

$$\sum M_B = 0;\ \int_0^l (l-t)\cdot q(t)dt - V_A\cdot l = 0\cdot$$

Se obţine:

$$V_A = \frac{q \cdot l}{12};\ V_B = \frac{q \cdot l}{4}.$$

Expresiile eforturilor sunt:

- regiunea AB; $x \in (0,l)$;

$$T(x) = V_A - \int_0^x q(t)dt = $$

$$= \frac{q \cdot l}{12} - \frac{q \cdot x^3}{3l^2};$$

$$T(0) = \frac{q \cdot l}{12};\ T(l) = -\frac{q \cdot l}{4};$$

$$T'(x) = -q\frac{x^2}{l^2} \cdot = -q(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0;$$

$$T(x) = 0 \Rightarrow x = 0{,}63l\cdot$$

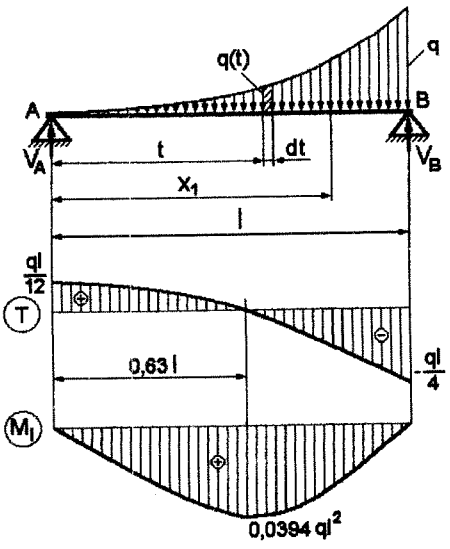


Fig. 2.19

$$M_i(x) = V_A \cdot x - \int_0^x (x - t) \cdot q(t)dt = \frac{q \cdot l}{12} \cdot x - \frac{q \cdot x^4}{12l^2};$$

$$M_i(0) = M_i(l) = 0$$

$$M_i'(x) = \frac{q \cdot l}{12} - \frac{q \cdot x^3}{3l^2} = T(x) = 0 \Rightarrow x = 0{,}63l\cdot$$

$$M_i\,(0{,}63l\cdot) = M_{i\,max} = 0{,}0394ql^2.\cdot$$

Se observă că forţa tăietoare variază după o parabolă cubică, iar momentul încovoietor după o parabolă de gradul patru.

2.1.4.4. Diagrame de eforturi la sisteme plane de bare drepte

Aplicaţia 2.11. Să se traseze diagramele de forţe tăietoare şi momente încovoietoare pentru grinda din figura 2.20.

Rezolvare

Se observă că grinda din figura 2.20 prezintă articulaţii interioare; astfel de grinzi sunt cunoscute sub denumirea de *grinzi Gerber*. La aceste tipuri de grinzi, pentru calculul reacţiunilor se folosesc ecuaţiile de echilibru static, la care se adaugă şi alte ecuaţii ce rezultă din condiţia ca momentele încovoietoare din articulaţiile interioare să fie nule.

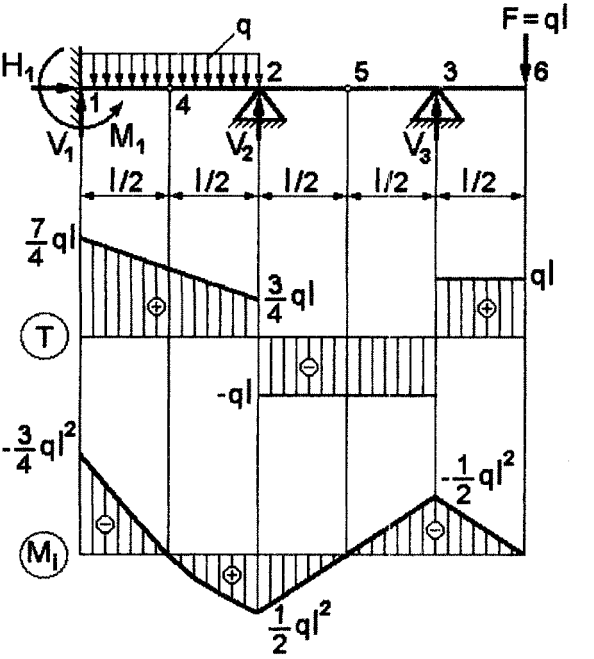


Fig. 2.20

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$V_1 - ql + V_2 + V_3 - F = 0;$

$H_1 = 0;$

$$M_1 - ql \cdot \frac{l}{2} + V_2 \cdot l + V_3 \cdot 2l - F \cdot \frac{5l}{2} = 0.$$

Ecuaţiile suplimentare sunt:

$$M_4 = 0 \Rightarrow - M_1 + V_1 \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = 0;$$

$$M_5 = 0 \Rightarrow - F \cdot l + V_3 \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Din rezolvarea sistemului format de cele cinci ecuaţii rezultă:

$$H_1 = 0;\ V_1 = \frac{7}{4}ql;\ V_2 = -\frac{7}{4}ql;\ V_3 = 2ql \text{ şi } M_1 = \frac{3}{4}ql^2.$$

Diagramele de eforturi se trasează la fel ca la grinzile drepte şi sunt reprezentate în figura 2.20.

Aplicaţia 2.12. Să se traseze diagramele de eforturi la bara cotită plană din figura 2.21.

Rezolvare

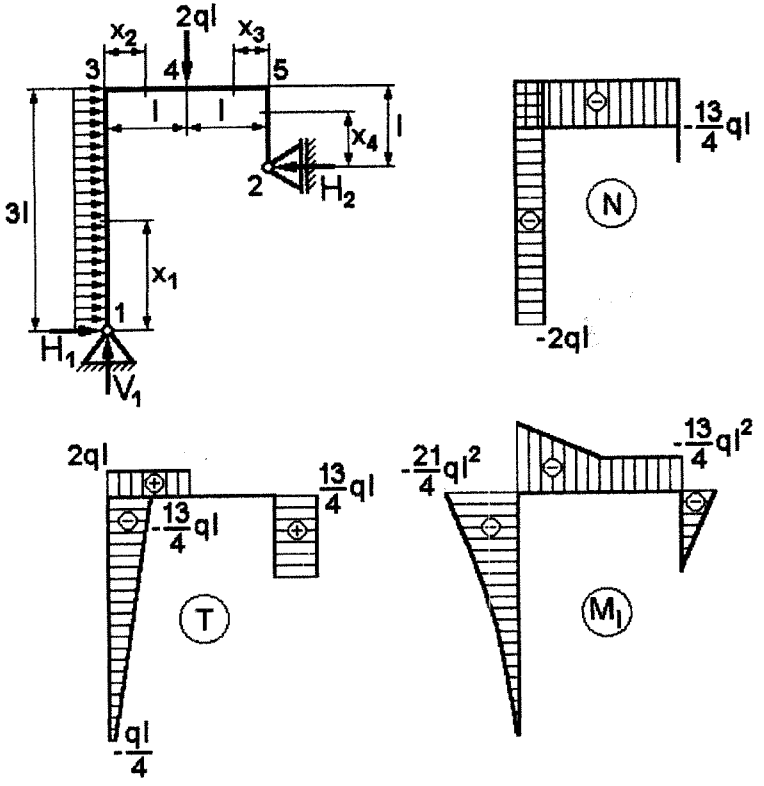


Fig. 2.21

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$H_1 + 3ql - H_2 = 0;$$

$$V_1 - 2ql = 0;$$

$$3ql \cdot \frac{3l}{2} + 2ql \cdot l - H_2 \cdot 2l = 0.$$

Rezolvând sistemul se obţine:

$$H_1 = \frac{ql}{4};\ V_1 = 2ql;\ H_2 = \frac{13}{4}ql.$$

Expresiile eforturilor sunt:

- regiunea 1-3; $x_1 \in (0,3l)$

$$N(x_1) = -V_1 = -2ql;$$

$$T(x_1) = -H_1 - qx_1 = -\frac{ql}{4} - qx_1;$$

$$M(x_1) = -H_1x_1 - qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} = -\frac{ql}{4} \cdot x_1 - \frac{qx_1^2}{2};$$

- regiunea 3-4; $x_2 \in (0,l)$

$$N(x_2) = -H_1 - 3ql = -\frac{13}{4}ql;$$

$$T(x_2) = V_1 = 2ql;$$

$$M(x_2) = V_1x_2 - H_1 \cdot 3l - 3ql \cdot \frac{3l}{2} = 2ql \cdot x_1 - \frac{21}{4}ql^2;$$

- regiunea 4-5; $x_3 \in (0,l)$

$$N(x_3) = -H_2 = -\frac{13}{4}ql;$$

$$T(x_3) = 0;$$

$$M(x_3) = -H_2 \cdot l = -\frac{13}{4}ql^2;$$

- regiunea 5-2; $x_4 \in (0,l)$

$$N(x_4) = 0;$$

$$T(x_4) = H_2;$$

$$M(x_4) = -H_2 \cdot x_4 = -\frac{13}{4}ql \cdot x_4.$$

2.1.4.5. Diagrame de eforturi la bare curbe plane

Aplicaţia 2.13. Să se traseze diagramele de eforturi la bara curbă plană din figura 2.22.

Rezolvare

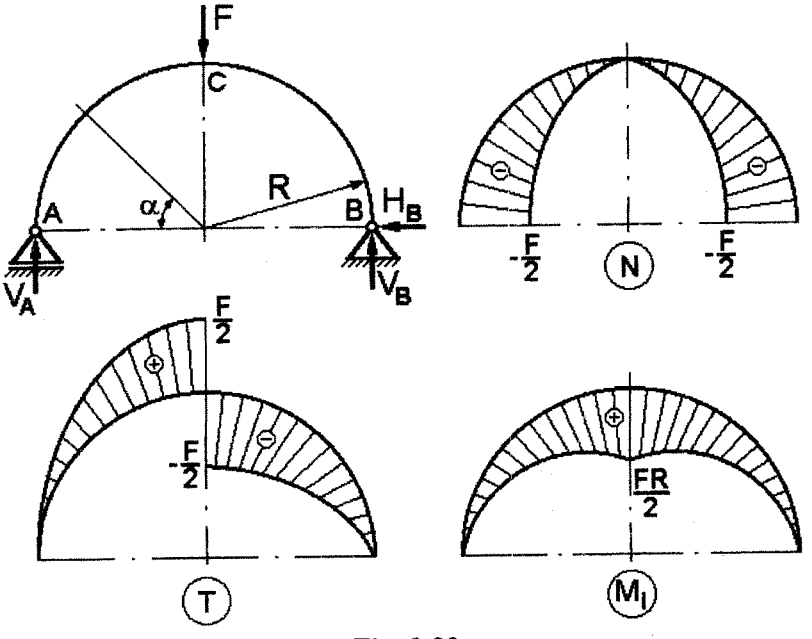


Fig. 2.22

Reacţiunile sunt:

$$V_A = V_B = \frac{F}{2};\ H_B = 0.$$

Expresiile eforturilor sunt:

- regiunea AC; $\alpha \in (0,\pi/2)$;

$$N(\alpha) = -V_A \cdot \cos\alpha = -\frac{F}{2} \cdot \cos\alpha;$$

$$T(\alpha) = V_A \cdot \sin\alpha = -\frac{F}{2} \cdot \sin\alpha$$

$$M_i(\alpha) = V_A \cdot (R - R \cdot \cos\alpha) = \frac{F}{2} R(1-\cos\alpha);$$

- regiunea BC; în această regiune, datorită simetriei, diagramele pentru forţa axială şi momentul încovoietor sunt simetrice iar pentru forţa tăietoare diagrama este antisimetrică.

Aplicaţia 2.14. Să se traseze diagramele de eforturi la bara curbă plană din figura 2.23.

Rezolvare

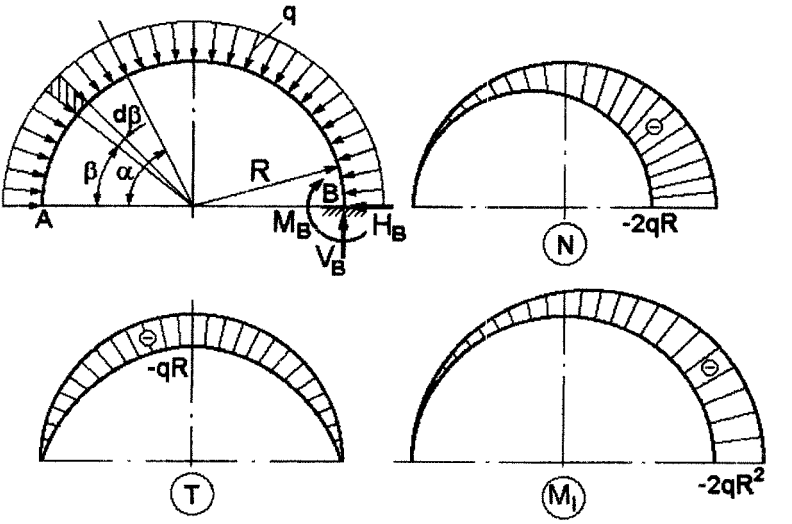


Fig. 2.23

Bara fiind încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, trasarea diagramelor poate fi efectuată fără a efectua calculul reacţiunilor, deorece într-o secţiune oarecare se consideră sarcinile dinspre capătul liber.

Eforturile sunt:

- regiunea AB; $\alpha \in (0,\pi)$;

$$N(\alpha) = -\int_0^{\alpha} qR\sin(\alpha-\beta)d\beta = -qR(1-\cos\alpha);$$

$$T(\alpha) = -\int_0^{\alpha} qR\cos(\alpha-\beta)d\beta = -qR\sin\alpha;$$

$$M(\alpha) = -\int_0^{\alpha} qR\cdot R\sin(\alpha-\beta)d\beta = -qR^2(1-\cos\alpha).$$

2.1.4.6. Diagrame de eforturi la sisteme spaţiale de bare

Aplicaţia 2.15. Să se traseze diagramele de eforturi la bara cotită spaţială din figura 2.24.

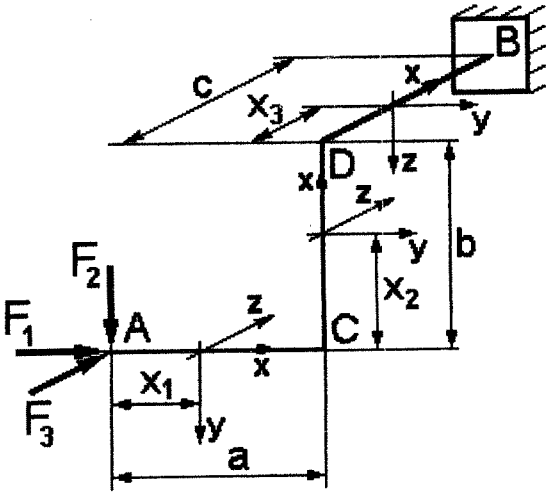


Fig. 2.24

Rezolvare

Expresiile eforturilor sunt:

regiunea AC; $x_1 \in (0,a)$	regiunea CD; $x_2 \in (0,b)$	regiunea BD; $x_3 \in (0,c)$;
$N(x_1) = -F_1$;	$N(x_2) = F_2$;	$N(x_3) = -F_3$;
$T_y(x_1) = -F_2$;	$T_y(x_2) = -F_1$;	$T_y(x_3) = -F_1$;
$T_z(x_1) = -F_3$;	$T_z(x_2) = -F_3$;	$T_z(x_3) = -F_2$;
$M_t(x_1) = 0$;	$M_t(x_2) = -F_3 \cdot a$;	$M_t(x_3) = -F_1 \cdot b - F_2 \cdot a$;
$M_{iy}(x_1) = F_3 \cdot x_1$;	$M_{iy}(x_2) = F_3 \cdot x_2$;	$M_{iy}(x_3) = F_3 \cdot b + F_2 \cdot x_3$;
$M_{iz}(x_1) = -F_2 \cdot x_1$;	$M_{iz}(x_2) = -F_2 \cdot a - F_1 \cdot x_2$;	$M_{iz}(x_3) = F_3 \cdot a - F_1 \cdot x_3$;

Diagramele eforturilor sunt reprezentate în figura 2.25.

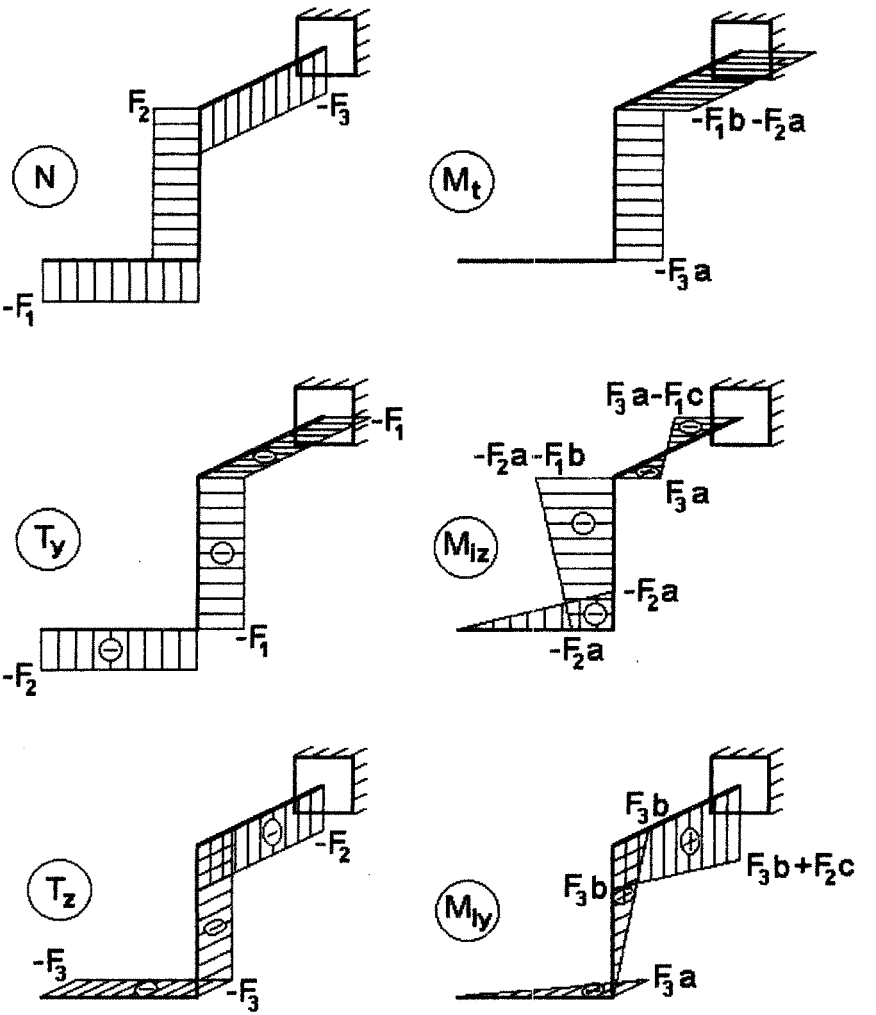


Fig. 2.25

Universitatea Tehnică Iași
BIBLIOTECA

2.1.5. Noţiunea de tensiune

Pentru a stabili starea de solicitare într-un punct oarecare M din interiorul unui corp solid, se efectuează o secţiune imaginară ce trece prin acel punct. Fie ΔA o arie elementară în jurul punctului M de pe secţiune (fig. 2.26a) şi ΔF rezultanta forţelor interioare suplimentare pe acest element de arie, ce acţionează pe o direcţie oarecare.

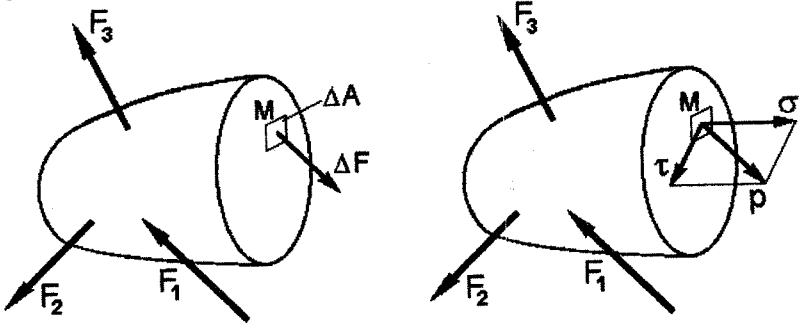


Fig. 2.26

Mărimea definită de raportul

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{2.27}$$

se numeşte ***tensiune medie***.

Limita tensiunii medii p_m când ΔA tinde către zero,

$$\boxed{p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right] \tag{2.28}$$

se numeşte ***tensiune*** în punctul considerat.

Tensiunea p are evident caracter de vector ca şi forţa dF, dar, în acelaşi timp, ea depinde şi de orientarea suprafeţei elementare dA, având într-un punct o infinitate de valori, cu orientări diferite. O asemenea mărime, mai complexă decât un vector, constituie o ***mărime tensorială***.

De obicei, în calcule, se preferă să se considere tensiunea p, prin componentele sale (fig. 2.26b):

- ***tensiunea normală*** (σ), componenta dirijată după normala la elementul de suprafață;

- ***tensiunea tangențială*** (τ), componenta situată în planul elemetului de suprafață al secțiunii.

Convențional, tensiunea normală σ este considerată pozitivă (+), dacă are sensul normalei exterioare la secțiune, sau negativă (-), în caz contrar, după cum efectul forțelor exterioare în punctul și pe direcția respectivă este de întindere sau de compresiune.
Pentru tensiunea normală τ nu este necesară stabilirea unei astfel de convenție de semne.

Între tensiunea p și componentele sale σ și τ, care au de asemenea un caracter tensorial, există relația algebrică:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2. \qquad (2.29)$$

Tensiunile p, σ și τ se măsoară în N/m^2 sau Pa ($1Pa = 1\ N/m^2$), N/mm^2 sau MPa ($1MPa = 1\ N/mm^2$) etc.

Dacă este cunoscută tensiunea p în puncul M, adică toate valorile corespunzătoare orientărilor posibile ale elementului de suprafață dA, se spune că este cunoscută *starea de tensiune* din punctul respectiv. Ea exprimă gradul de solicitare în punctul considerat, ca urmare a acțiunii forțelor exterioare ce acționează asupra corpului solid.

2.1.6. Ecuații de echivalență între eforturi și forțele corespunzătoare tensiunilor

Cele șase eforturi reprezentate în centrul de greutate al secțiunii transversale constituie o imagine globală, echivalentă, a stării de tensiuni din toate punctele suprafeței. Această reprezentare globală este necesară ca o etapă de calcul, în sensul că mai întâi se determină eforturile în conformitate cu definițiile prezentate anterior (v. § 2.1.2) și apoi se determină starea de tensiuni din toate punctele secțiunii.

Eforturile N, T_y, T_z, M_t, M_{iy} şi M_{iz}, fiind componente ale torsorului de reducere al forţelor interioare suplimentare în centrul de greutate al secţiunii transversale, se pot scrie următoarele relaţii între eforturi şi tensiuni (fig. 2.27):

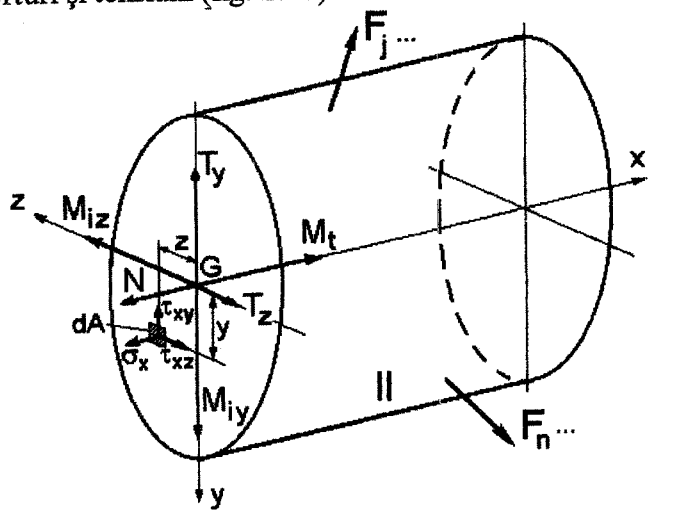


Fig. 2.27

$$\begin{cases} N = \iint_A \sigma_x \cdot dA \\ T_y = \iint_A \tau_{xy} \cdot dA \\ T_z = \iint_A \tau_{xz} \cdot dA \\ M_t = \iint_A (z \cdot \tau_{xy} - y \cdot \tau_{xz}) \cdot dA \\ M_{iy} = -\iint_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \\ M_{iz} = \iint_A y \cdot \sigma_x \cdot dA \end{cases} \qquad (2.30)$$

unde A este aria secţiunii transversale a barei.

Acest sistem de ecuaţii reprezintă echivalenţa dintre eforturi şi forţele corespunzătoare tensiunilor din secţiunea respectivă.

2.2. Aspectul geometric al problemelor de rezistența materialelor

Sub acțiunea forțelor exterioare, corpurile își schimbă forma și dimensiunile. Această proprietate generală a corpurilor din natură se numește *deformabilitate*.

Modificările distanțelor dintre două puncte și ale unghiurilor dintre două direcții se numesc ***deformații.***

Modificările lungimilor segmentelor drepte se numesc *deformații liniare*, iar modificările unghiurilor, *deformații unghiulare* sau *lunecări*.

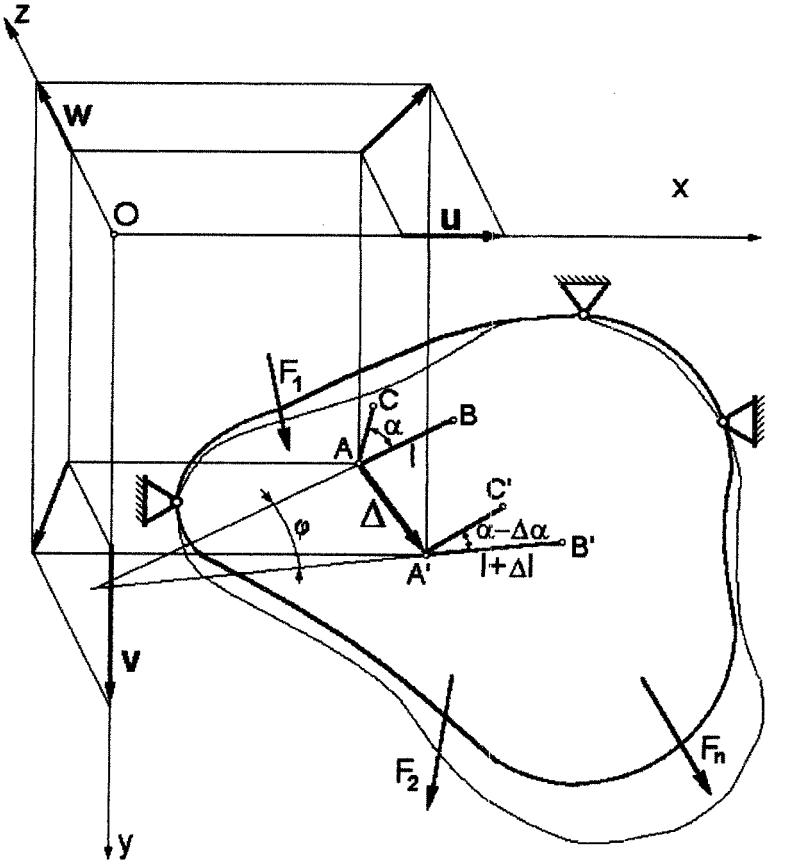


Fig. 2.28

Se consideră un corp solid de formă oarecare şi se notează trei puncte necoliniare ale acestuia *A, B, C* (fig. 2.28). Sub acţiunea forţelor exterioare în echilibru $F_1, F_2, \ldots, F_n$, corpul se deformează iar punctele ajung într-o nouă poziţie, *A′, B′, C′*. Distanţa *l* dintre punctele *A* şi *B* înainte de deformarea corpului devine *l′* după deformare, când punctele ajung în *A′* respectiv *B′*.

Diferenţa Δl dintre lungimea *l′* după deformare şi lungimea iniţială *l* se numeşte *deformaţie liniară absolută*:

$$\Delta l = l' - l \quad [m]. \tag{2.31}$$

Se defineşte ***deformaţia liniară specifcă*** ε în puntul *A*, pe direcţia *AB*, limita raportului dintre deformaţia liniară absolută Δl şi lungimea iniţială *l*, când aceasta tinde către zero:

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{l \to 0} \frac{\Delta l}{l}} \tag{2.32}$$

Deformaţia liniară specifică este o mărime adimensională, considerată pozitivă când corespunde unei alungiri a segmentului şi negativă atunci când corespunde unei scurtări a acestuia.

Deoarece într-un punct se pot considera o infinitate de direcţii, rezultă că *deformaţia liniară specifică* ε din acel punct *este un tensor*, şi poate lua o infinitate de valori.

Diferenţa $\Delta\alpha$ dintre unghiul iniţial $\alpha = \widehat{BAC}$ înainte de deformare şi unghiul $\alpha' = \widehat{B'A'C'}$ după deformare, se numeşte *deformaţie unghiulară* sau *lunecare*:

$$\Delta\alpha = \lim_{\substack{AB \to 0 \\ AC \to 0}} (\widehat{BAC} - \widehat{B'A'C'}). \tag{2.33}$$

Unghiul $\Delta\alpha$ cu care se schimbă un unghi drept se numeşte ***lunecare specifică*** şi se notează cu γ.

Lunecarea specifică este o mărime adimensională, considerată pozitivă atunci când corespunde micşorării unghiului drept şi negativă când unghiul drept devine obtuz.

Deoarece într-un punct există o infinitate de perechi de direcţii perpendiculare, rezultă că lunecarea sprecifică γ, este o mărime tensorială şi poate lua o infinitate de valori.

Deformaţia corpului în totalitatea lui poate fi imaginată ca un cumul al deformaţiilor tuturor paralelipipedelor elementare componente.

Ansamblul deformaţiilor liniare specifice ε_x, ε_y, ε_z şi al lunecărilor spegifice γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} din jurul unui punct, determină *starea de deformaţie* din jurul acestuia.

Deformarea corpurilor sub acţiunea forţelor exterioare se traduce prin schimbarea poziţiei diverselor puncte ale acestora în spaţiu, adică au loc *deplasări* ale acestor puncte.

Ţinând seama de modul în care se deformează un corp, se deosebesc două tipuri de deplasări: *deplasare liniară* şi *deplasare unghiulară.*

Vectorul Δ, având originea în punctul A al corpului nedeformat şi vârful în punctul A' al corpului deformat se numeşte ***deplasare liniară totală*** (fig. 2.28).

Proiecţiile acestui vector pe axele sistemului de coordonate la care este raportat corpul se numesc *componentele deplasării* după axe în punctul respectiv şi se notează cu u, v şi w.

Prin ***deplasare unghiulară*** φ se înţelege rotirea dintre segmentul de dreaptă determinat de două puncte ale unui corp înainte de deformare şi segmentul determinat de aceleaşi puncte ale corpului după deformarea acestuia (fig. 2.28). Această deplasare se măsoară prin unghiurile pe care le fac proiecţiile dreptelor ce conţin cele două segmente de dreaptă, într-un sistem triortogonal.

2.3. Aspectul fizic al problemelor de rezistenţa materialelor

În paragrafele precedente s-au analizat două aspecte ale comportării corpurilor solide deformabile sub acţiunea forţelor exterioare: *aspectul static* (§ 2.1), referitor la eforturi şi tensiuni şi *aspectul geometric* (§ 2.2), referitor la deformaţii. Între mărimile ce caracterizează cele două aspecte există relaţii fizice (aspectul fizic, ce urmează a fi analizat în continuare), care pentru un anumit material se stabilesc pe cale experimentală.

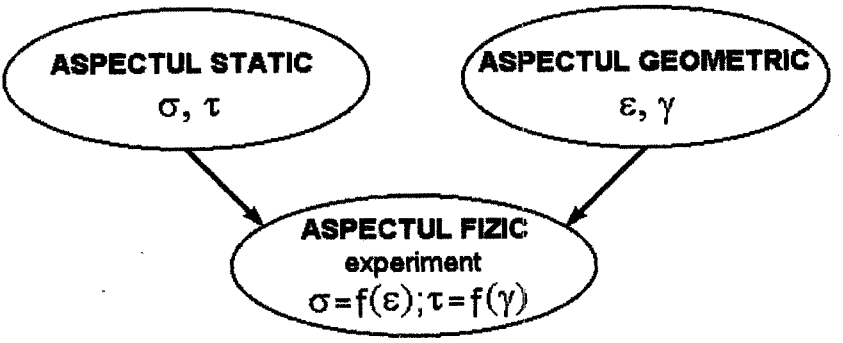


Fig. 2.29

2.3.1. Încercarea la tracţiune

Încercarea la tracţiune este considerată încercarea de bază a unui material, fiind completată în unele situaţii cu încercări specifice altor solicitări: compresiune, răsucire, încovoiere, forfecare. Pentru materialele metalice, încercarea se efectuează în conformitate cu prevederile standardului SR EN 10 002-1:1994.

Din materialul de încercat se confecţionează epruvete care pot avea diferite forme şi dimensiuni; una din formele uzuale este prezentată în figura 2.30.

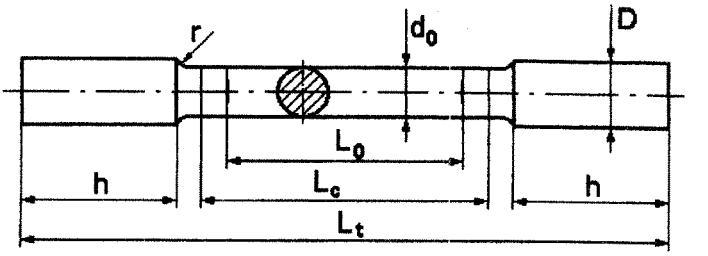


Fig. 2.30

Dimensiunile principale sunt *diametrul porţiunii calibrate, d_0* şi *lungimea iniţială între repere, L_0.*

Epruveta se montează pe o maşină de încercat la tracţiune, a cărei schemă de principiu este prezentată în figura 2.31.

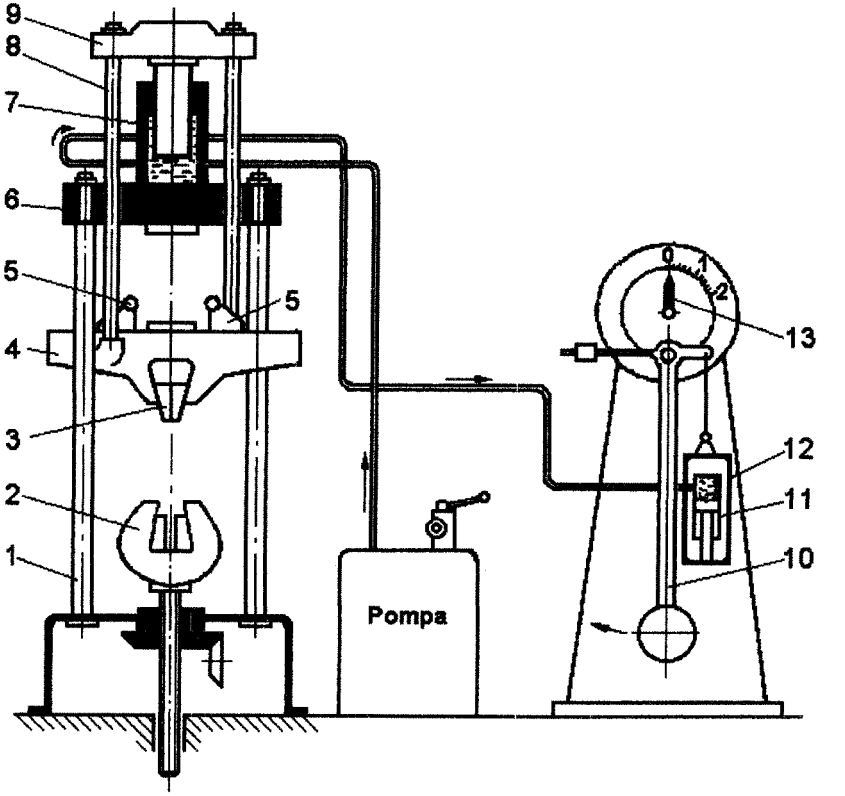


Fig. 2.31

Principalele elemente constructive sunt: 1 - coloane de fixare; 2, 3 - bacuri; 4, 6 - traverse; 5 - reazeme; 7 - cilindru hidraulic; 8 - coloane; 9 - traversă; 10 - pendul; 11 - cilindru; 12 - cadru; 13 - ac indicator.

Cu pompa hidraulică se trimite ulei în cilindrul 7. Pistonul montat în acest cilindru deplasează cadrul mobil format din traversele 4 ,9 şi coloanele 8, în sus. În acest fel epruveta, montată între bacurile 2 şi 3, este solicitată la tracţiune. Maşina poate fi utilizată şi pentru alte tipuri de încercări mecanice.

În cursul încercării se înregistrează graficul relaţiei dintre forţa de tracţiune şi alungirea epruvetei.

2.3.2. Curba caracteristică a materialelor

Pentru o epruvetă din oţel moale încercată la tracţiune, graficul relaţiei dintre forţă şi alungire are aspectul din figura 2.32.

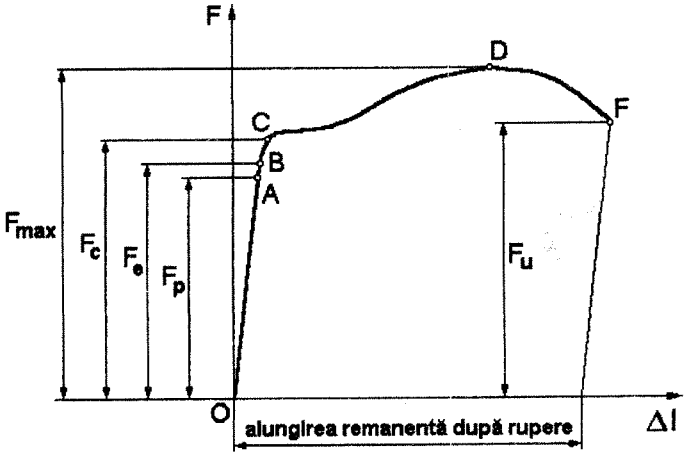


Fig. 2.32

Această reprezentare grafică se numeşte *diagrama încercării la tracţiune*. Diagrama variază în funcţie de dimensiunile epruvetei încercate şi de aceea, pentru a caracteriza un anumit material, se recurge la o altă reprezentare: pe abscisă se măsoară deformaţia liniară specifică ε, iar pe ordonată tensiunea normală σ,

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}, \tag{2.34}$$

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \tag{2.35}$$

unde A_0 este aria iniţială a secţiunii transversale a epruvetei.

Această reprezentare se numeşte *curba caracteristică a materialului*, figura 2.33.

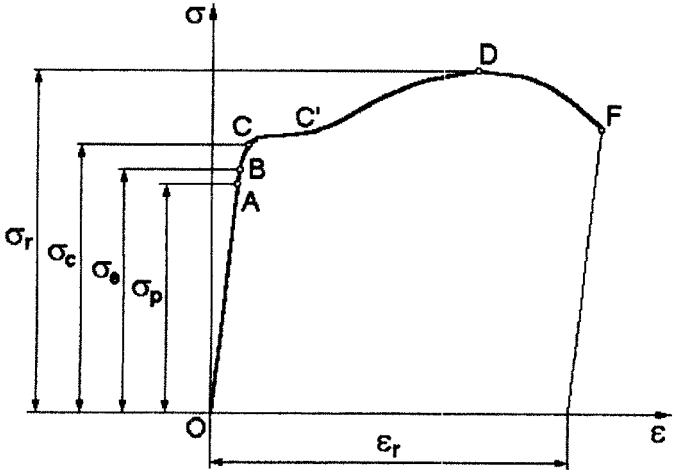


Fig. 2.33

Pe această curbă se pot observa o serie de puncte care definesc anumite mărimi importante:

- ***limita de proporţionalitate***, σ_p - valoarea tensiunii maxime până la care curba caracteristică este o linie dreaptă; porţiunea *OA* este zona de proporţionalitate a curbei caracteristice;
- ***limita de elasticitate***, σ_e - valoarea tensiunii maxime până la care materialul are un comportament perfect elastic; această mărime corespunde punctului *B* de pe curba caracteristică; în realitate nu există materiale perfect elastice şi de aceea se defineşte o *limită de elasticitate tehnică* ca fiind valoarea tensiunii pentru care deformaţia liniară specifică remanentă, după descărcarea epruvetei, este de 0,01%;
- ***limita de curgere***, σ_c - valoarea tensiunii la care alungirea epruvetei creşte la tensiune aproximativ constantă; la atingerea

limitei de curgere, curba caracteristică are un traseu orizontal cu mici oscilaţii, *CC'*, numit *palier de curgere*; pentru unele materiale acest palier de curgere nu există şi de aceea se defineşte *limita de curgere convenţională*, $\sigma_{0,2}$ sau $R_{p0,2}$ ca fiind valoarea tensiunii căreia îi corespunde, după descărcarea epruvetei, o deformaţie liniară specifică remanentă de 0,2%;

- ***rezistenţa de rupere,*** σ_r sau $\mathbf{R_m}$ - valoarea maximă a tensiunii, calculată cu relaţia :

$$\sigma_r = \frac{F_{max}}{A_0}; \qquad (2.36)$$

rezistenţa de rupere corespunde punctului *D*, de pe curba caracteristică; zona *C'D* este numită zonă de întărire; vecinătatea puctului *D* corespunde apariţiei unei gâtuiri a epruvetei care se accentuează şi conduce la producerea ruperii; din cauza gâtuirii, forţa aplicată epruvetei până la rupere este mai mică decât forţa maximă, şi curba are un traseu descendent *DF*.

2.3.3. Legea lui Hooke

Pe curba caracteristică a unor materiale se observă, în partea sa iniţială, o porţiune de linie dreaptă (*OA*, fig. 2.33). Dependenţa liniară dintre tensiune şi deformaţie se scrie sub forma:

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon} \qquad (2.37)$$

unde *E* este *modulul de elasticitate longitudinală* sau *modulul lui Young*.

Relaţia (2.37) reprezintă forma cea mai simplă pentru ***legea lui Hooke***:

Tensiunile sunt proporţionale cu deformaţiile specifice.

Această lege este fundamentală pentru teoria elasticităţii şi rezistenţa materialelor.

Deoarece deformaţia specifică este o mărime adimensională, modulul de elasticitate longitudinală, *E*, are aceleaşi unităţi de măsură ca şi tensiunea.

Pentru oţeluri, valoarea modulului de elasticitate longitudinală este $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

Dacă se efectuează încercarea la răsucire a unei epruvete de oţel moale, se obţine o curbă caracteristică la răsucire, $\tau = f(\gamma)$, similară celei obţinute la tracţiune.

Porţiunea rectilinie a acestei curbe are ecuaţia:

$$\boxed{\tau = G \cdot \gamma} \qquad (2.38)$$

care reprezintă *legea lui Hooke la răsucire.*

Constanta G se numeşte *modul de elasticitate transversală*; pentru oţel $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ MPa.

2.3.4. Diferite forme ale curbei caracteristice

Curba caracteristică reprezentată în figura 2.33 este convenţională deoarece la calculul tensiunii dintr-un anumit moment al încercării, se raportează forţa din acel moment la aria secţiunii iniţiale A_0, ca şi cum aceasta ar fi constantă pe toată durata încercării. În realitate se constată că odată cu alungirea epruvetei are loc şi un fenomen de micşorare a dimensiunilor secţiunii transversale, numit *contracţie transversală.* Dacă forţa F s-ar raporta la secţiunea reală, s-ar obţine *curba caracteristică reală*, C_r (fig. 2.34).

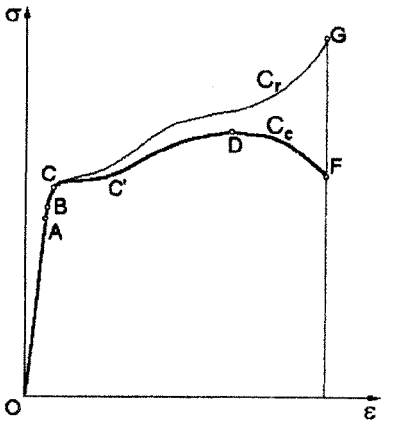


Fig. 2.34

Trasarea acesteia prezintă dificultăţi legate de evaluarea dimensiunilor secţiunii reale; deosebirea dintre cele două curbe este mai pronunţată doar după depăşirea limitei de curgere.

Deoarece în majoritatea aplicaţiilor tehnice materialele sunt folosite numai în zona de proporţionalitate, se preferă varianta convenţională a curbei caracteristice, C_c .

Forma curbei caracteristice diferă de la un material la altul (fig. 2.35).

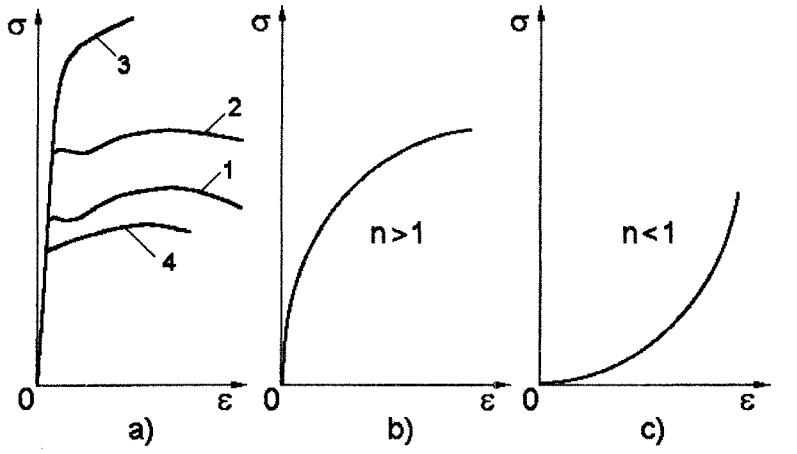


Fig. 2.35

În acest sens, se pot deosebi două categorii de materiale:

- *materiale care ascultă de legea lui Hooke* - cele care prezintă o porţiune liniară a curbei caracteristice (fig. 2.35a; 1-oţel cu conţinut scăzut de carbon; 2-oţel cu conţinut mediu de carbon; 3-oţel cu conţinut ridicat de carbon; 4-bronz);

- *materiale care nu ascultă de legea lui Hooke* - cele care nu prezintă liniaritate între tensiuni şi deformaţii; pentru astfel de materiale curba caracteristică poate avea forma din figura 2.35b (fonta, alama, cuprul, materiale ceramice), sau din figura 2.35c (materiale textile, cauciucul).

Pentru curbele caracteristice ale unor astfel de materiale se poate folosi o expresie analitică de forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_0}, \qquad (2.39)$$

unde E_0 este modulul de elasticitate longitudinală mediu;

n - coeficient de material.

2.3.5. Caracteristici mecanice ale materialelor solicitate la tracţiune

În urma încercării de tracţiune, pe lângă cele patru mărimi definite anterior σ_p, σ_e, σ_c, σ_r se mai pot determina *alungirea la rupere* A_n şi *gâtuirea la rupere Z.*

Alungirea la rupere se calculează cu relaţia:

$$A_n = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100\%, \qquad (2.40)$$

unde n este un indice care exprimă raportul L_0/d_0, (uzual are valoarea 10 sau 5);

L_u - distanţa între repere măsurată după rupere, cu cele două părţi ale epruvetei puse cap la cap.

Gâtuirea la rupere se determină cu relaţia:

$$Z = \frac{A_0 - A_u}{A_0} \cdot 100\%, \qquad (2.41)$$

unde A_u este aria secţiunii de rupere.

Mărimile σ_p, σ_e, σ_c, σ_r, A_n şi Z, poartă denumirea de ***caracteristici mecanice ale materialelor*** şi cunoaşterea lor este deosebit de importantă pentru efectuarea calculelor de rezistenţă.

2.3.6. Caracteristici elastice ale materialelor

Pe lângă modulul de elasticitate longitudinală E, şi modulul de elasticitate transversală G, definite anterior, o altă caracteristică elastică este *coeficientul de contracţie transversală* ν, numit şi *coeficientul lui Poisson.*

Experimental s-a constatat că la încercarea de tracţiune are loc şi fenomenul de contracţie transversală, situţie în care se poate scrie relaţia:

$$\boxed{\varepsilon_t = -\nu \cdot \varepsilon} \qquad (2.42)$$

unde ε_t este deformaţia liniară specifică pe direcţie transversală.

Valorile coeficientului lui Poisson sunt cuprinse între 0 - 0,5. Pentru numeroase materiale printre care şi oţelurile, $\nu = 0,3$.

Mărimile ***E, G*** şi ν se numesc ***caracteristici elastice ale materialelor***.

2.3.7. Factori care influenţează caracteristicile mecanice şi elastice ale materialelor

Principalii factori care influenţează caracteristicile mecanice şi elastice ale unui material sunt:

- forma şi dimensiunile epruvetei;
- viteza de încărcare;
- temperatura de încercare;
- timpul de aplicare a sarcinii.

În figura 2.36 se prezintă variaţia în funcţie de temperatură a unor caracteristici mecanice şi elastice pentru un oţel cu $\sigma_r = 420$ MPa la temperatura de 20°C.

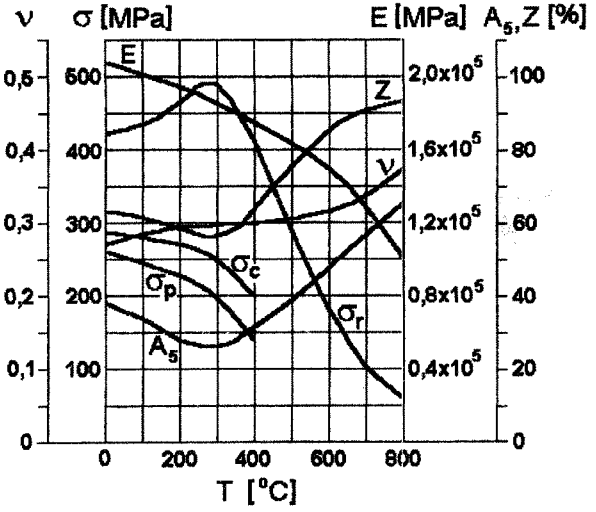


Fig. 2.36

Pentru a putea compara rezultatele experimentale obţinute în diferite laboratoare este necesară standardizarea formelor şi dimensiunilor epruvetelor precum şi a condiţiilor de încercare.

2.4. Ipoteze de bază în rezistența materialelor

Pentru a stabili relațiile de calcul, în rezistența materialelor se fac o serie de ipoteze simplificatoare referitoare la structura materialelor și la comportarea acestora sub acțiunea sarcinilor.
Aceste ipoteze permit obținerea unor metode de calcul simple și rapide, erorile introduse fiind acceptabile în practica inginerească.

Ipotezele de bază în rezistența materialelor sunt:

❶ ***Ipoteza mediului continuu*** - materialul din care este alcătuit un corp este continuu și umple tot spațiul definit de volumul său;

❷ ***Ipoteza omogenității și izotropiei*** - materialul are aceeași compoziție, structură, și proprietăți în toate punctele și pe toate direcțiile;

❸ ***Ipoteza elasticității perfecte*** - consideră că până la anumite valori ale tensiunilor, materialul se comportă perfect elastic;

❹ ***Ipoteza deplasărilor și deformațiilor mici*** - consideră că deplasările cauzate de sarcini sunt neglijabile în comparație cu dimensiunile corpului iar deformațiile specifice sunt mult mai mici decât unitatea; pe baza acestei ipoteze ecuațiile de echilibru static se scriu pe corpul nedeformat, iar în anumite calcule puterile sau produsele deformațiilor specifice se neglijează;

❺ ***Ipoteza proporționalității dintre tensiuni și deformații*** - admite că materialele satisfac legea lui Hooke; această ipoteză permite aplicarea *principiului suprapunerii efectelor* conform căruia tensiunile și deformațiile care se produc într-un corp sunt independente de succesiunea aplicării forțelor;

❻ ***Ipoteza lui Barré de Saint Venant*** - consideră că înlocuirea unui sistem de forțe care acționează pe o mică suprafață a corpului cu un alt sistem de forțe static echivalent cu primul, influențează apreciabil starea de tensiuni și deformații în zona de aplicare, dar are o influență neglijabilă la distanțe relativ mari de locul de aplicare a forțelor (fig. 2.37);

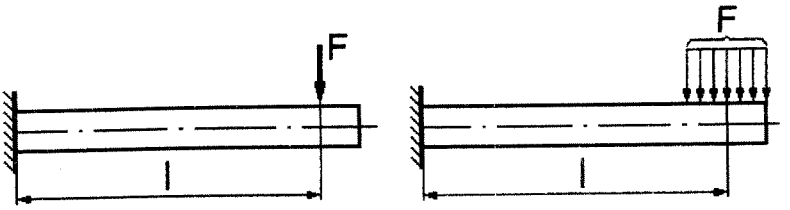


Fig. 2.37

● ***Ipoteza secţiunilor plane*** *a lui Bernoulli* - consideră că o secţiune plană şi perpendiculară pe axa barei înainte de deformare, rămâne plană şi perpendiculară şi după deformare (fig. 2.38).

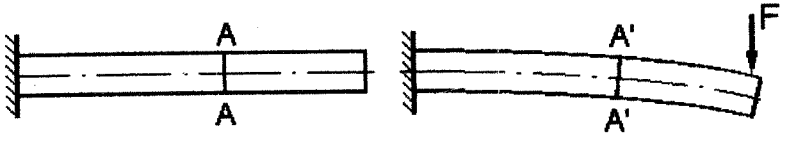


Fig. 2.38

2.5. Metode de calcul în rezistenţa materialelor

Rezolvarea problemelor de rezistenţa materialelor (dimensionare sau verificare) se poate face prin una din metodele:

- metoda rezistenţelor admisibile şi
- metoda coeficienţilor de siguranţă.

Metoda rezistenţelor admisibile porneşte de la ideea că tensiunile maxime din piese trebuie să nu depăşească o anumită valoare convenţională denumită *rezistenţă admisibilă.*

Rezistenţa admisibilă se defineşte prin relaţia:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_L}{c} \qquad (2.43)$$

unde σ_L este tensiunea ce caracterizează starea limită (periculoasă) a solicitării la care este supusă piesa;

c - coeficient de siguranţă ($c > 1$).

Pentru materiale tenace tensiunea limită este considerată limita de curgere, σ_c sau τ_c iar pentru materiale fragile, rezistenţa de rupere σ_r sau τ_r.

Valorile coeficienţilor de siguranţă depind de:

- natura materialului (cu cât materialul este mai neomogen, coeficienţii de siguranţă sunt mai mari);
- precizia cu care se evaluează sarcinile care acţionează asupra corpului;
- diferenţa dintre schemele teoretice de calcul şi forma reală a corpului;
- precizia cu care se determină caracteristicile mecanice;
- modul de acţiune în timp a sarcinilor;
- durata de utilizare şi importanţa piesei în timpul exploatării.

Cu cât ipotezele de calcul sunt mai apropiate de realitate, sarcinile sunt evaluate mai corect şi proprietăţile materialelor sunt mai bine cunoscute, cu atât coeficienţii de siguranţă se aleg mai mici şi corespunzător, rezistenţele admisibile sunt mai mari.

Unele indicaţii cu privire la valorile coeficienţilor de siguranţă şi ale rezistenţelor admisibile se găsesc în tratatele de specialitate ($c = 2 \div 3$ pentru materiale tenace, $c = 3 \div 4$ pentru materiale fragile, $c = 4 \div 6$ pentru materiale foarte fragile).

Alegerea judicioasă a coeficientului de siguranţă, respectiv a rezistenţei admisibile, constituie o problemă deosebit de importantă deoarece de această alegere depinde pe de o parte siguranţa piesei iar pe de altă parte realizarea cât mai economică a acesteia.

Aplicarea metodei rezistenţelor admisibile constă în esenţă în a pune următoarele condiţii, în secţiunea periculoasă:

- pentru probleme de *dimensionare*,

$$\sigma_{max} = \sigma_a \text{ (sau } \tau_{max} = \tau_a); \tag{2.44}$$

- pentru probleme de *verificare*,

$$\sigma_{ef\,max} \leq \sigma_a \text{ (sau } \tau_{ef\,max} \leq \tau_a). \tag{2.45}$$

Metoda coeficienților de siguranță constă în a compara coeficientul de siguranță efectiv c_{ef} , cu cel impus de norme sau impus de proiectant, c.

În domeniul construcțiilor de mașini, această metodă este utilizată la rezolvarea problemelor de stabilitate (flambaj) unde coeficientul de siguranță se calculează cu relația

$$c_{ef} = \frac{F_{cr}}{F} \tag{2.46}$$

în care F_{cr} este forța critică de flambaj;

F - forța efectivă;

și pentru calculele de rezistență la oboseală unde se folosește relația

$$c_{ef} = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{ef\,max}} \tag{2.47}$$

în care σ_{lim} este tensiunea limită corespunzătoare solicitării ciclice respective;

$\sigma_{ef\,max}$ - tensiunea efectivă maximă din secțiunea periculoasă.

În cazul problemelor de *dimensionare* se pune condiția

$$c_{ef} = c \tag{2.49}$$

iar în cazul problemelor de *verificare*, trebuie satisfăcută relația

$$c_{ef} \geq c. \tag{2.50}$$

După cum se poate observa din cele expuse, în cea de-a doua metodă coeficientul de siguranță apare explicit, pe când în metoda rezistențelor admisibile acesta este implicit, înglobat în valoarea rezistenței admisibile.

3. SOLICITAREA DE ÎNTINDERE ŞI COMPRESIUNE A BARELOR DREPTE

O bară dreaptă este solicitată la întindere sau compresiune dacă asupre ei acţionează un sistem de forţe în echilibru ce au acelaşi suport, identic cu axa barei. Din acest motiv, această solicitare mai este cunoscută şi sub denumirea de *solicitare axială.*

Cazul cel mai simplu de solicitare axială este prezentat în figura 3.1.

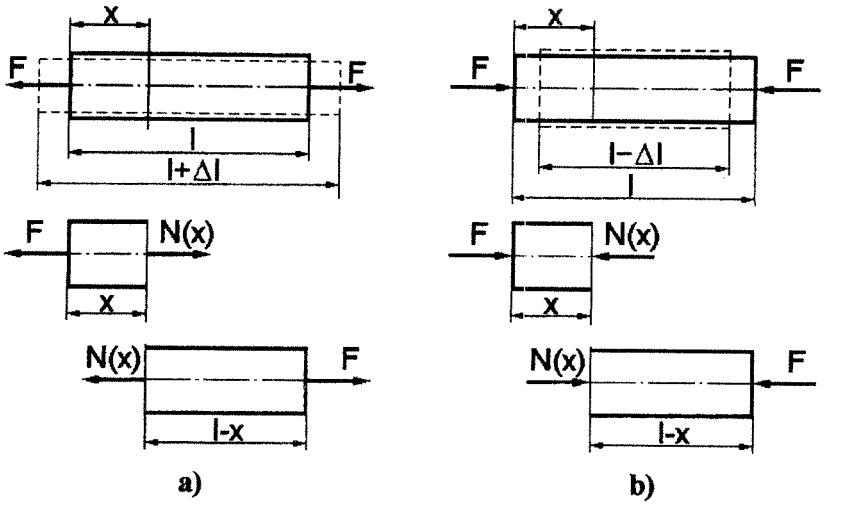


Fig. 3.1

Solicitarea axială se caracterizează prin:

- alungirea barei în cazul solicitării de întindere (fig. 3.1a), sau scurtarea acesteia în cazul solicitării de compresiune (fig. 3.1b);
- apariţia în secţiunile transversale numai a eforturilor axiale *N(x)*.

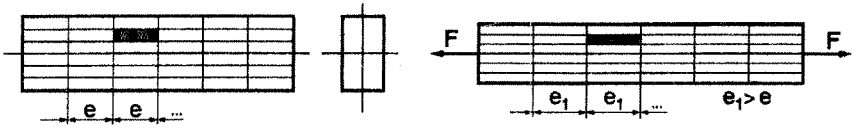
Dacă în lungul axei barei sunt aplicate mai multe forţe, eforturile *N(x)* variază şi în acest caz este necesară trasarea diagramei de forţe axiale (§ 2.1.4).

3.1. Calculul tensiunilor normale la solicitări axiale

Pentru a stabili natura tensiunilor (σ sau τ) care apar în secţiunile transversale ale unei bare solicitată la întidere, se consideră următorul experiment.

Pe o bară dreaptă, de secţiune dreptunghiulară, se trasează o serie de linii echidistante şi paralele cu axa barei şi altele perpendiculare pe acestea (de asemenea echidistante), astfel încât pe suprafaţa barei se realizează o reţea de dreptunghiuri (fig. 3.2a).

Solicitând la întindere acestă bară, ea se deformează ca în figura 3.2b.



a) b)

Fig. 3.2

Analizând reţeaua de linii de pe bara deformată, se fac următoarele constatări:

- reţeaua deformată este formată tot din dreptunghiuri, deci nu se produc modificări ale unghiurilor drepte; rezultă că lunecările specifice sunt nule, $\gamma = 0$ şi în consecinţă conform legii lui Hooke, $\tau = G \cdot \gamma$, tensiunile tangenţiale sunt nule, $\tau = 0$;
- lungimea dreptunghiurilor a crescut, deci se produc alungiri; rezultă că deformaţiile liniare specifice sunt diferite de zero, $\varepsilon \neq 0$ şi în consecinţă conform legii lui Hooke, $\sigma = E \cdot \varepsilon$, tensiunile normale sunt diferite de zero, $\sigma \neq 0$;
- liniile transversale ale reţelei sunt tot echidistante dar cu pasul mai mare decât cel al reţelei nedeformate; rezultă că deformaţiile liniare specifice sunt constante, $\varepsilon = const.$ şi conform legii lui Hooke, $\sigma = const.$

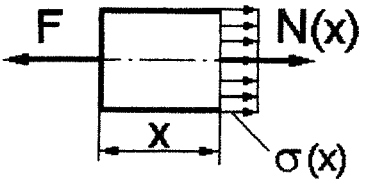


Fig. 3.3

Admiţând că fenomenul se produce la fel şi în interior, se poate trage concluzia că la solicitarea de întindere apar numai tensiuni normale uniform distribuite în secţiunea transversală a barei (fig. 3.3).

Având în vedere concluziile experimentului, se face o analiză a celor şase ecuaţii de echivalenţă, ţinând seama şi de faptul că în secţiunea transversală apar numai forţe axiale:

$$\begin{cases} N = \iint_A \sigma_x \cdot dA \\ T_y = \iint_A \tau_{xy} \cdot dA \\ T_z = \iint_A \tau_{xz} \cdot dA \\ M_t = \iint_A (z \cdot \tau_{xy} - y \cdot \tau_{xz}) \cdot dA \\ M_{iy} = -\iint_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \\ M_{iz} = \iint_A y \cdot \sigma_x \cdot dA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = \sigma_x \cdot \iint_A dA \\ 0 \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \\ 0 = -\sigma_x \cdot \iint_A z \cdot dA \\ 0 = \sigma_x \cdot \iint_A y \cdot dA \end{cases} \qquad (3.1)$$

Se constată că din cele şase ecuaţii de echivalenţă, trei sunt identităţi $0 \equiv 0$, iar în continuare se analizează cele trei ecuaţii rămase.

Integralele din ultimele două ecuaţii reprezintă momentele statice de inerţie S_y respectiv S_z, ale secţiunii transversale, care sunt nule, doarece sistemul de axe în care sunt definite eforturile este un sistem central (O≡G). În acest fel ultimele două ecuaţii devin şi ele identităţi 0≡0.

Din prima ecuaţie de echivalenţă rezultă relaţia pentru calculul tensiunilor normale la solicitarea axială:

$$\boxed{\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}} \qquad (3.2)$$

Relaţia (3.2) permite efectuarea calculelor de dimensionare şi de verificare din condiţia de rezistenţă. În cazul barelor de secţiune constantă aceste relaţii sunt:

- pentru dimensionare,

$$A_{nec} = \frac{|N_{max}|}{\sigma_a}; \tag{3.3}$$

- pentru verificare,

$$\sigma_{max} = \frac{|N_{max}|}{A} \le \sigma_a . \tag{3.4}$$

În cazul barelor din materiale cu o comportare nesimetrică la tracţiune şi compresiune (fonta, materialele ceramice ş.a.), în relaţiile (3.3) şi (3.4) se foloseşte tensiunea admisibilă corespunzătoare solicitării.

3.2. Calculul deformaţiilor la solicitări axiale

O lungime elementară de bară, *dx*, se alungeşte sau se scurtează cu mărimea

$$\Delta dx = \varepsilon(x) \cdot dx . \tag{3.5}$$

Pentru o bară de lungime *l*, deformaţia totală este

$$\Delta l = \int_{(l)} \varepsilon(x)dx = \int_{(l)} \frac{\sigma(x)}{E} dx = \int_{(l)} \frac{N(x)}{EA(x)} dx,$$

$$\boxed{\Delta l = \int_{(l)} \frac{N(x)}{EA(x)} dx} \tag{3.6}$$

În cazul particular al barei de secţiune constantă *A*, solicitată de o forţă axială constantă, *N*, relaţia (3.6) devine:

$$\boxed{\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}} \tag{3.7}$$

Produsul *EA* se numeşte *rigiditate la solicitarea axială.*

3.3. Calculul energiei potenţiale de deformaţie

Se consideră o bară dreaptă solicitată la întindere de o forţă F (fig. 3.4). Bara este încărcată static de la zero la valoarea finală F.

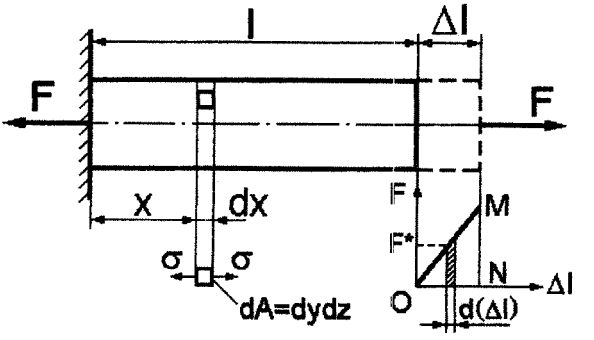


Fig. 3.4

În procesul de deformare, care se desfăşoară simultan cu încărcarea barei, punctul de aplicaţie al forţei se deplasează cu Δl şi deci se efectuează un lucru mecanic exterior L_{ext}.

În cazul solicitării în domeniul de proporţionalitate, o deformare momentană elementară d(Δl), poate fi considerată că se efectuează sub acţiunea forţei momentane constante F^*. Lucrul mecanic elementar efectuat de această forţă este reprezentat în figura 3.4 de suprafaţa elementară haşurată. Lucrul mecanic total al forţei exterioare în timpul procesului de deformare este reprezentat de aria triunghiului OMN, adică

$$L_{ext} = \frac{F \cdot \Delta l}{2}. \qquad (3.8)$$

Ca urmare a încărcării barei, în interiorul acesteia apar forţe interioare suplimentare care-şi deplasează şi ele punctele de aplicaţie odată cu deformarea.

Lucrul mecanic efectuat de forţele interioare suplimentare în procesul de deformare elastică a unui corp, se înmagazinează în interiorul acestuia sub formă de ***energie potenţială de deformaţie****, U.*

Această energie permite corpului să revină la forma şi dimensiunile iniţiale, după înlăturarea sarcinilor, fără nici un aport energetic din exterior.

Se consideră un element de volum $dV = dxdydz$ izolat din bara solicitată (fig. 3.4), asupra căruia acţionează forţele elementare

$$dF = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot dydz . \qquad (3.9)$$

Această forţă este de tip elastic, ca şi forţele exterioare care o produc.

Energia potenţială de deformaţie, elementară, dU, înmagazinată în volumul elementar dV, este egală cu lucrul mecanic efectuat de această forţă:

$$dU = dL_{int} = \frac{(\sigma \cdot dydz) \cdot (\varepsilon dx)}{2} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} dV . \qquad (3.10)$$

Deoarece tensiunea normală este constantă pe întreaga secţiune transversală, se poate scrie

$$dV = A(x) \cdot dx . \qquad (3.11)$$

Ţinând cont de legea lui Hooke şi de expresia (3.2) pentru tensiunea normală, energia potenţială de deformaţie înmagazinată în întreaga bară este:

$$U = \iiint_{(V)} \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} dV = \iiint_{(V)} \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_{(l)} \frac{N^2(x)}{2EA(x)} dx ,$$

$$\boxed{U = \int_{(l)} \frac{N^2(x)}{2EA(x)} dx} \qquad (3.12)$$

Pentru cazul particular al unei bare de secţiune constantă A, solicitată de o forţă axială constantă N, energia potenţială de deformaţie este

$$\boxed{U = \frac{N^2 l}{2EA}} \qquad (3.13)$$

3.4. Solicitarea axială la care se ţine seama de greutatea proprie

La stabilirea relaţiilor de calcul din paragrafele precedente, nu s-a ţinut seama de greutatea proprie a barei, aceasta fiind considerată neglijabilă în raport cu celelalte sarcini.

În anumite situaţii din practică (prăjinile de foraj, cablurile ascensoarelor, turnurile, stâlpii foarte înalţi, etc.) greutatea proprie nu mai poate fi neglijată în calculele de rezistenţă.

În figura 3.5 se consideră o bară dreaptă verticală, de secţiune constantă A pe toată lungimea l, confecţionată dintr-un material cu greutatea specifică γ. Bara este încastrată la capătul superior şi este încărcată la capătul liber cu o forţă concentrată F.

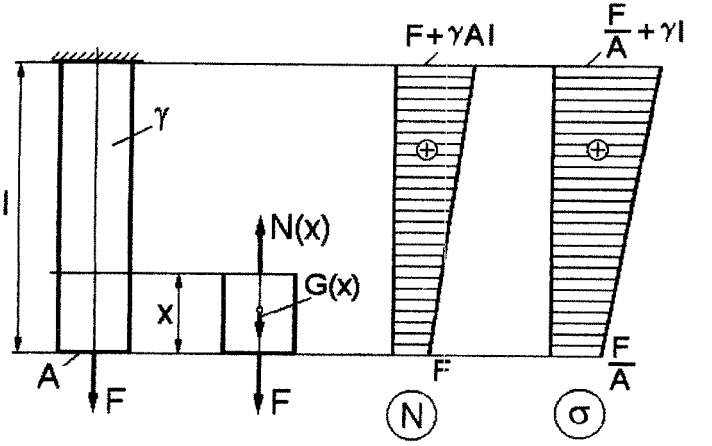


Fig. 3.5

Forţa axială într-o secţiune oarecare, situată la distanţa $x \in (o,l)$ faţă de capătul liber al barei, este:

$$N(x) = F + \gamma A x . \qquad (3.14)$$

Tensiunea normală în această secţiune este:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot x . \qquad (3.15)$$

Diagrama de forţe axiale şi diagrama tensiunilor normale sunt prezentate în figura 3.5.

Se pune condiţia de rezistenţă în secţiunea cea mai solicitată care este în încastrare

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l \leq \sigma_a . \tag{3.16}$$

Rezultă mărimea secţiunii necesare:

$$\boxed{A_{nec} = \frac{F}{\sigma_a - \gamma \cdot l}} \tag{3.17}$$

Alungirea totală a barei se calculează cu ajutorul relaţiei (3.6), care devine:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx = \int_0^l \frac{F + \gamma Ax}{EA} dx = \frac{1}{EA}\left(Fl + \frac{\gamma Al^2}{2}\right). \tag{3.18}$$

Dacă se notează greutatea totală a barei $G = \gamma Al$, se obţine:

$$\boxed{\Delta l = \frac{\left(F + \frac{G}{2}\right)l}{EA}} \tag{3.19}$$

Bara de egală rezistenţă

Aria secţiunii transversale, determinată cu formula (3.17), este necesară numai pentru secţiunea din încastrare; se constată deci că materialul este utilizat la adevărata lui capacitate de rezistenţă numai în această secţiune, unde tensiunea atinge valoarea admisibilă. Ariile celorlalte secţiuni pot fi mai mici, deoarece şi tensiunile sunt mai mici.

Bara cu secţiune variabilă la care tensiunile sunt egale cu tensiunea admisibilă în toate secţiunile transversale se numeşte ***bară de egală rezistenţă.***

O astfel de bară reprezintă soluţia constructivă optimă din punct de vedere al economiei de material.

În figura 3.6 se consideră o bară dreaptă, verticală, de secţiune variabilă pe lungime, confecţionată dintr-un material cu greutatea specifică γ şi încărcată cu o forţă concentrată F, la capătul liber.

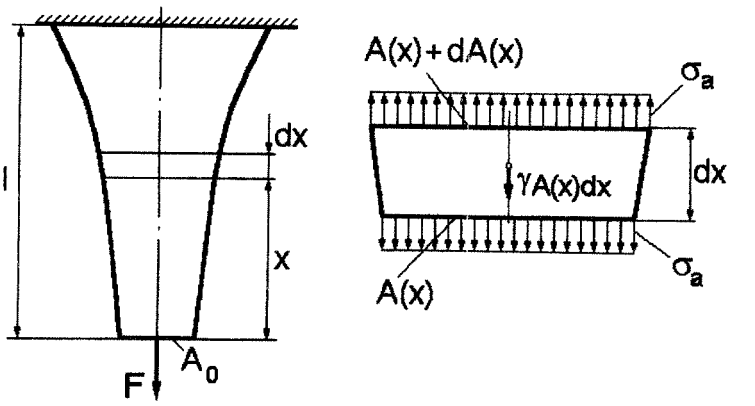


Fig. 3.6

Se urmăreşte stabilirea legii de variaţie a secţiunii, pentru a obţine bara de egală rezistenţă. În acest scop se izolează din bară un element de volum delimitat de două secţiuni transversale aflate la distanţele x, respectiv $x+dx$, de capătul liber.

Elementul izolat se află în echilibru sub acţiunea greutăţii proprii şi a forţelor date de tensiunile σ_a care acţionează pe secţiunile $A(x)$ şi $A(x) + dA(x)$.

Ecuaţia de proiecţii de forţe pe direcţia axei barei se scrie:

$$\sigma_a \cdot [A(x)+dA(x)] - \gamma \cdot A(x) \cdot dx - \sigma_a \cdot A(x) = 0 . \qquad (3.20)$$

Prin reducerea termenilor asemenea se obţine ecuaţia diferenţială

$$\frac{dA(x)}{A(x)} = \frac{\gamma}{\sigma_a} dx , \qquad (3.21)$$

a cărei soluţie este

$$\ln A(x) = \frac{\gamma}{\sigma_a} x + C . \qquad (3.22)$$

Constanta de integrare C se obţine punând condiţia ca pentru $x = 0$, aria secţiunii să fie $A(0) = A_0 = F/\sigma_a$. Rezultă constanta $C = \ln A_0$, care înlocuită în relaţia (3.22) conduce la:

$$\ln\frac{A(x)}{A_0}=\frac{\gamma}{\sigma_a}x \qquad \text{sau} \qquad \boxed{A(x)=A_0\cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma_a}x}} \qquad (2.23)$$

Realizarea unei asemenea bare este foarte complicată din punct de vedere tehnologic şi deci costisitoare, deşi din punct de vedere al consumului de material este cea mai economică soluţie.

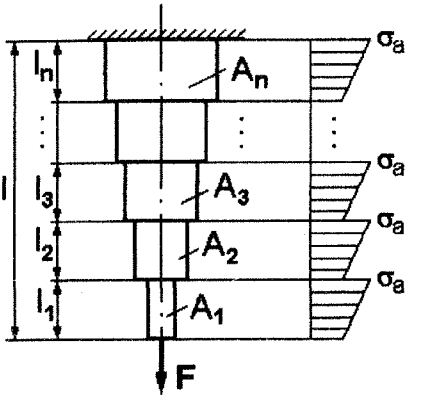


Fig. 3.7

Pentru a elimina dificultăţile tehnologice, soluţia practică pentru a obţine o bară cât mai apropiată ca formă de cea de egală rezistenţă, constă în executarea acesteia din tronsoane de secţiuni constante pe fiecare tronson (fig. 3.7).

Pentru determinarea secţiunilor transversale ale tronsoanelor se utilizează relaţia (3.17), unde forţa F se înlocuieşte cu efortul din secţiunea de la capătul inferior al tronsonului respectiv (forţa F, la care se adugă greutatea proprie a tronsoanelor inferioare).

Pentru ariile celor n tronsoane rezultă:

$$A_1=\frac{F}{\sigma_a-\gamma l_1};$$

$$A_2=\frac{A_1\sigma_a}{\sigma_a-\gamma l_2}=\frac{F\sigma_a}{(\sigma_a-\gamma l_1)(\sigma_a-\gamma l_2)};$$

...

$$A_n=\frac{A_{n-1}\sigma_a}{\sigma_a-\gamma l_n}=\frac{F\sigma_a^{n-1}}{(\sigma_a-\gamma l_1)(\sigma_a-\gamma l_2)...(\sigma_a-\gamma l_n)}. \qquad (3.24)$$

Bara din n tronsoane are *volumul minim* dacă lungimile acestora sunt egale:

$$l_1=l_2=\cdots=l_n=\frac{l}{n}. \qquad (3.25)$$

În acest caz, aria secţiunii tronsonului *i* este:

$$A_i = \frac{F\sigma_a^{i-1}}{\left(\sigma_a - \gamma\frac{l}{n}\right)^i} \qquad (3.26)$$

Deformaţia totală a barei formată din tronsoane se obţine însumând alungirile tronsoanelor calculate cu relaţia (3.19), în care F se înlocuieşte cu efortul din secţiunea de la capătul inferior al tronsonului respectiv.

3.5. Concentratori de tensiuni

Pe cale experimentală dar şi teoretic (teoria elasticităţii), s-a stabilit că în cazul variaţiilor bruşte ale secţiunilor, distribuţia tensiunilor din secţiunea transversală a barelor solicitate axial, nu mai este uniformă cum indică relaţia (3.2).

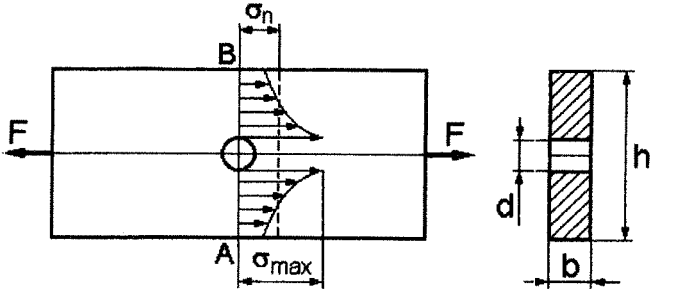


Fig. 3.8

În figura 3.8 se prezintă cazul unei bare de secţiune dreptunghiulară $b \times h$, solicitată la întindere, în care este executată o gaură cu diametrul d. Secţiunea AB din dreptul acestei găuri este secţiunea periculoasă a barei (deorece aria este minimă). Dacă tensiunile s-ar distribui uniform în această secţiune, ele ar avea valoarea *nominală*:

$$\sigma_n = \frac{F}{A_{min}} = \frac{F}{(b-d)\cdot h}. \qquad (3.27)$$

În realitate, în această secţiune, tensiunea este variabilă şi atinge valoarea maximă în vecinătatea găurii, mărimea ei fiind

$$\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n \tag{3.28}$$

unde α_k este *coeficientul de concentrare a tensiunilor* (α_k=1,5÷3).

Experienţa arată că α_k depinde de elementele geometrice ale concentratorului. Valorile coeficientului α_k ($\alpha_k > 1$) se găsesc în memoratoare inginereşti.

Concentratorii de tensiuni sunt foarte variaţi: degajări, găuri, crestături, racordări, filete etc.

Efectul concentrării tensiunilor este deosebit de periculos pentru materiale fragile şi mai puţin periculos pentru materiale tenace. La cele din urmă, după atingerea limitei de curgere se produce o uniformizare a tensiunilor în secţiunea cu concentrator. Ca urmare la materialele tenace, pentru solicitări statice, nu se consideră în calcule efectul de concentrare, întrucât el produce numai anumite vârfuri de tensiuni, fără a cauza ruperea. Dimpotrivă, în cazul materialelor fragile, unde fenomenul de concentrare se manifestă până la apariţia ruperii, în calcule se introduce coeficientul de concentrare a tensiunilor.

3.6. Tensiuni din secţiuni înclinate la solicitări axiale

Se consideră o bară dreaptă solicitată la întindere, din care se izolează un element de volum care conţine o suprafaţă *dA*, înclinată cu unghiul α faţă de secţiunea transversală (fig. 3.9).

Pe suprafaţa elementului de volum din secţiunea transversală acţionează tensiunile normale σ_x, iar pe suprafaţa înclinată tensiunile totale *p* ce acţionează pe aceeaşi direcţie; acestea se pot descompune în componenta normală $\sigma(\alpha)$ şi cea tangenţială $\tau(\alpha)$.

Forţele corespunzătoare acestor tensiuni au rezultantele aplicate în centrele de greutate ale suprefeţelor pe care acţionează iar echilibrul lor se poate scrie folosind schema din figura 3.9c.

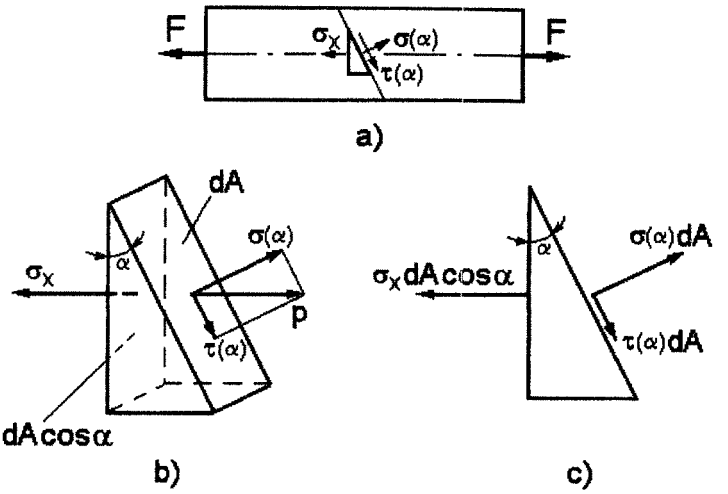


Fig. 3.9

Proiecţia forţelor pe direcţia $\sigma(\alpha)$ este:

$$\sigma(\alpha)dA - \sigma_x\, dA\cos^2\alpha = 0 \qquad (3.29)$$

Proiecţia forţelor pe direcţia $\tau(\alpha)$ este:

$$\tau(\alpha)dA - \sigma_x\, dA\cos\alpha\cdot\sin\alpha = 0 \qquad (3.30)$$

Rezolvând sistemul format de ecuaţiile (3.29) şi (3.30) se obţine:

$$\begin{cases} \sigma(\alpha) = \dfrac{\sigma_x}{2}(1+\cos 2\alpha) \\ \tau(\alpha) = \dfrac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha \end{cases} \qquad (3.31)$$

Pe baza relaţiilor (3.31) se poate studia variaţia tensiunilor $\sigma(\alpha)$ şi $\tau(\alpha)$ în funcţie de unghiul $\alpha\in(0,\pi)$. Se găseşte că:

- $\sigma(\alpha)_{max} = \sigma_x$ la $\alpha=0$ şi $\alpha=\pi$ (secţiunea transversală);
  $\sigma(\alpha)_{min} = 0$ la $\alpha = \pi/2$ (secţiune longitudinală);

- $\tau(\alpha)_{max} = \sigma_x/2$ la $\alpha = \pi/4$;
  $\tau(\alpha)_{min} = -\sigma_x/2$ la $\alpha = 3\pi/4$;
  $\tau(\alpha) = 0$ la $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$ şi $\alpha=\pi$.

Tensiunile normale maxime şi minime dintr-un punct se numesc *tensiuni principale* iar direcţiile după care acţionează se numesc *direcţii principale.*

Se poate da o interpretare grafică variaţiei tensiunilor $\sigma(\alpha)$ şi $\tau(\alpha)$ în funcţie de unghiul α, cu ajutorul *cercului lui Mohr.*

Eliminând unghiul α între relaţiile sistemului (3.31) se obţine ecuaţia:

$$\left(\sigma(\alpha)-\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau^2(\alpha)=\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2. \qquad (3.32)$$

Într-un sistem de axe de coordonate $\sigma(\alpha)$ şi $\tau(\alpha)$, ecuaţia (3.32) reprezintă un cerc de rază $\sigma_x/2$ cu centrul de coordonate $(\sigma_x/2, 0)$, figura 3.10

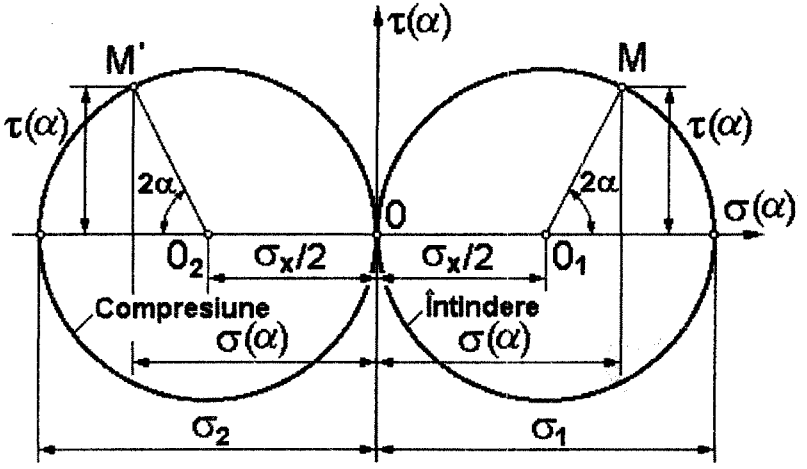


Fig. 3.10

Tensiunile $\sigma(\alpha)$ şi $\tau(\alpha)$ dintr-o secţiune înclinată cu unghiul α, sunt date de coordonatele punctului *M*, în cazul întinderii şi respectiv *M'*, în cazul compresiunii.

3.7. Aplicaţii

3.7.1. Probleme static determinate

Aplicaţia 3.1. Să se dimensioneze bara dreaptă din figura 3.11a în două variante: - secţiune circulară constantă pe toată lungimea;
- secţiune circulară constantă pe regiuni.

Pentru cele două variante să se calculeze deformaţia totală a barei. Se cunosc : F = 10 kN; l = 0,2 m; σ_a = 150 MPa; E = $2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

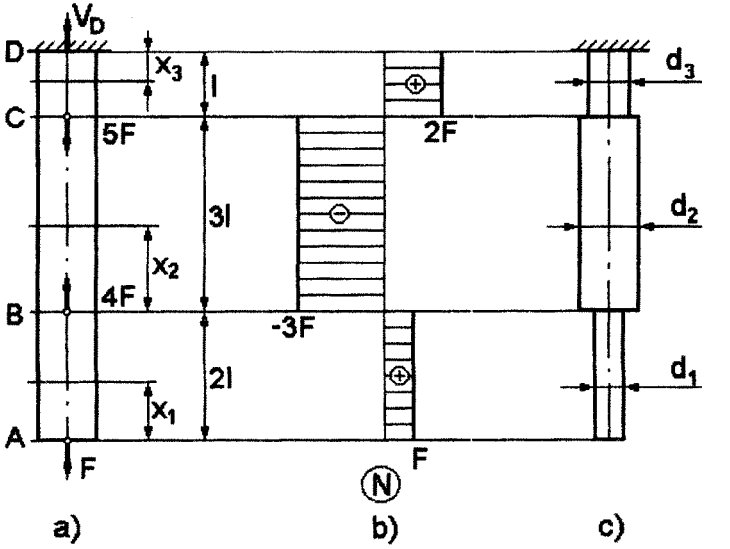


Fig. 3.11

Rezolvare

Forţele axiale în cele trei regiuni sunt:

- regiunea AB; $x_1 \in (0,2l)$; $N(x_1) = F$;
- regiunea BC; $x_2 \in (0,3l)$; $N(x_2) = F - 4F = -3F$;
- regiunea CD; $x_3 \in (0,l)$; $N(x_3) = F - 4F + 5F = 2F$.

Diagrama de forţe axiale este reprezentată în figura 3.11b.

Varianta 1. Condiţia de rezistenţă este:

$$\sigma_a = \sigma_{max} = \frac{|N_{max}|}{A_{nec}} = \frac{|-3F|}{A_{nec}};$$

$$\begin{cases} A_{nec} = \dfrac{3F}{\sigma_a} \\ A_{nec} = \dfrac{\pi d^2}{4} \end{cases} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{12F}{\pi\sigma_a}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 10000}{\pi \cdot 150}} = 15{,}9\,\text{mm}.$$

Deformaţia totală a barei este:

$$\Delta l = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \frac{F \cdot 2l}{EA} + \frac{(-3F) \cdot 3l}{EA} + \frac{2F \cdot l}{EA} =$$

$$= -\frac{5F \cdot l}{EA} = -\frac{50000 \cdot 200 \cdot 4}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 15{,}9^2} = -0{,}24\,\text{mm}$$

Semnul minus semnifică scurtarea barei.

Varianta 2. Din condiţia de rezistenţă pe fiecare regiune, rezultă:

$$A_{1nec} = \frac{F}{\sigma_a} = \frac{\pi d_1^2}{4} \quad \Rightarrow \quad d_1 = \sqrt{\frac{4F}{\pi\sigma_a}} = \sqrt{\frac{40000}{\pi \cdot 150}} = 9{,}2\,\text{mm};$$

$$d_2 = 15{,}9\,\text{mm};$$

$$A_{3nec} = \frac{2F}{\sigma_a} = \frac{\pi d_3^2}{4} \quad \Rightarrow \quad d_3 = \sqrt{\frac{8F}{\pi\sigma_a}} = \sqrt{\frac{80000}{\pi \cdot 150}} = 13\,\text{mm}.$$

Deformaţia totală în cea de-a doua variantă constructivă (fig. 3.11c) este:

$$\Delta l = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \frac{F \cdot 2l}{EA_1} + \frac{(-3F) \cdot 3l}{EA_2} + \frac{2F \cdot l}{EA_3} = -0{,}002\,\text{mm}.$$

Aplicaţia 3.2. Să se dimensioneze barele sistemului din figura 3.12 de secţiune circulară ştiind că F = 16 kN, σ_a = 140 MPa, $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_2 = 30°$ şi $\alpha_F = 30°$.

Rezolvare

Se determină forţele axiale din cele două bare scriind ecuaţiile de echilibru ale nodului *C*:

$$N_1 \cdot \cos\alpha_1 + N_2 \cdot \cos\alpha_2 - F \cdot \sin\alpha_F = 0;$$

$$N_1 \cdot \sin\alpha_1 - N_2 \cdot \sin\alpha_2 + F \cdot \cos\alpha_F = 0.$$

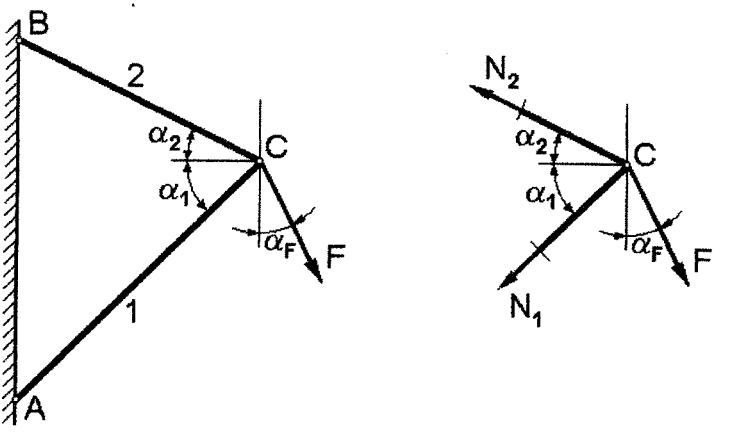


Fig. 3.12

Rezolvând sistemul rezultă:

$$N_1 = -F\frac{\cos(\alpha_2+\alpha_F)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} = -16000\frac{\cos(30^\circ+30^\circ)}{\sin(45^\circ+30^\circ)} = -8282{,}2\,\text{N};$$

$$N_2 = F\frac{\cos(\alpha_1-\alpha_F)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} = 16000\frac{\cos(45^\circ-30^\circ)}{\sin(45^\circ+30^\circ)} = 16000\,\text{N}.$$

Din condiţiile de rezistenţă impuse celor două bare se obţine:

$$A_{1\,nec} = \frac{|N_1|}{\sigma_a} = \frac{\pi d_1^2}{4} \Rightarrow \quad d_1 = \sqrt{\frac{4\cdot 8282{,}2}{\pi\cdot 140}} = 8{,}7\,\text{mm};$$

$$A_{2\,nec} = \frac{N_2}{\sigma_a} = \frac{\pi d_2^2}{4} \Rightarrow \quad d_2 = \sqrt{\frac{4\cdot 16000}{\pi\cdot 140}} = 12{,}1\,\text{mm}.$$

3.7.2. Probleme static nedeterminate

Într-un număr mare de aplicaţii, reacţiunile şi eforturile din bare nu pot fi determinate numai cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru static. Astfel de probleme se numesc *static nedeterminate*. Pentru rezolvarea acestora se utilizează ecuaţii suplimentare din condiţiile de deformabilitate pe care trebuie să le satisfacă bara sau sistemul de bare.

Deoarece în relaţiile pentru calculul deformaţiilor intervin dimensiunile secţiunilor transversale, rezultă că în cazul problemelor de dimensionare trebuie precizat modul de variaţie al secţiunilor în lungul barelor precum şi relaţiile dintre mărimile secţiunilor tuturor barelor.

După determinarea eforturilor din toate barele unui sistem, calculele de dimensionare sau de verificare precum şi calculul deformaţiilor decurg la fel ca la problemele static determinate. În aplicaţiile ce urmează, se exemplifică numai modul de ridicare a nedeterminării.

Aplicaţia 3.3. Bara încastrată (sau articulată) la ambele capete Se consideră bara dreaptă de secţiune constantă, încastrată la ambele capete şi solicitată axial de două forţe concentrate, 2F şi F, ca în figura 3.13. Să se calculeze efoturile axiale din bară.

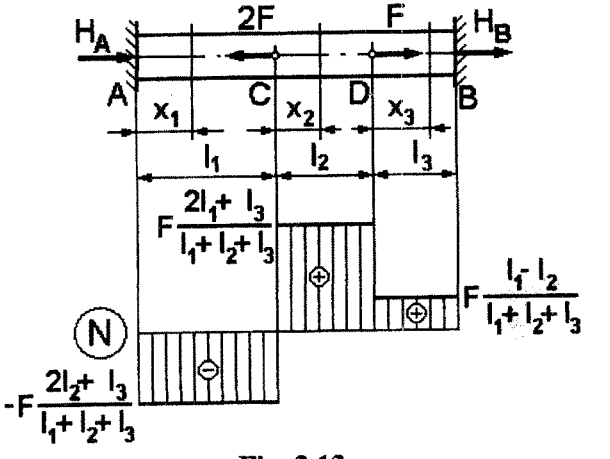


Fig. 3.13

Rezolvare

Deoarece bara este solicitată numai de forţe axiale, în cele două reazeme reacţiunile sunt de asemenea, forţe axiale.

Se poate scrie o singură ecuaţie de echilibru:

$$H_A - 2F + F + H_B = 0 . \qquad (3.33)$$

Având în vedere modul de rezemare, condiţia de deformaţie pe care trebuie să o îndeplinească bara este:

$$\Delta l_{tot} = 0 . \qquad (3.34)$$

Pentru calculul deformaţiilor fiecărei regiuni se utilizează relaţia (3.6) în care:

$N(x_1) = -H_A$ pentru $x_1 \in (0, l_1)$;

$N(x_2) = -H_A + 2F$ pentru $x_2 \in (0, l_2)$;

$N(x_3) = -H_A + 2F - F$ pentru $x_3 \in (0, l_3)$;

şi $A(x_1) = A(x_2) = A(x_3) = A$.

Condiţia exprimată de ecuaţia (3.34) devine:

$$\frac{(-H_A)\cdot l_1}{EA} + \frac{(-H_A + 2F)\cdot l_2}{EA} + \frac{(-H_A + F)\cdot l_3}{EA} = 0. \quad (3.35)$$

Din ecuaţiile (3.33) şi (3.35) rezultă reacţiunile:

$$H_A = F\frac{2l_2 + l_3}{l_1 + l_2 + l_3};$$

$$H_B = F\frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2 + l_3}.$$

Înlocuind reacţiunea H_A în expresiile forţelor axiale se obţine:

$$N(x_1) = -F\frac{2l_2 + l_3}{l_1 + l_2 + l_3};$$

$$N(x_2) = F\frac{2l_1 + l_3}{l_1 + l_2 + l_3};$$

$$N(x_3) = F\frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2 + l_3}.$$

Pentru $l_1 > l_2$ diagrama de forţe axiale este reprezentată în fig. 3.13.

Aplicaţia 3.4. Bara supusă variaţiei de temperatură cu dilatări (sau scurtări) împiedicate

Se consideră o bară din două tronsoane de secţiuni, lungimi şi materiale diferite, încastrată la un capăt şi liberă la celălalt. La temperatura t_0 între capătul liber şi peretele rigid B există un joc δ (fig. 3.14). În cazul unei variaţii de temperatură, în sensul creşterii cu Δt, se cere să se calculeze tensiunile din cele două tronsoane ale barei dacă se cunosc lungimile l_1, l_2, ariile A_1, A_2, modulele de elasticitate longitudinală E_1, E_2 şi coeficienţii de dilatare termică α_1, α_2.

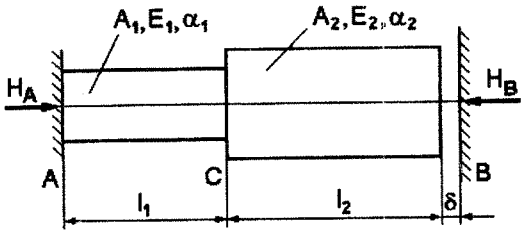


Fig. 3.14

Rezolvare

Ca urmare a creşterii temperaturii, bara se dilată cu:

$$\Delta l^{(t)} = (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\cdot\Delta t \,.$$

(3.36)

Se disting două situaţii:

1) $\Delta l^{(t)} \le \delta$, caz în care bara se dilată liber şi deci nu este solicitată mecanic ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$);

2) $\Delta l^{(t)} > \delta$, caz în care dilatarea este împiedicată de peretele rigid din *B* şi deci în cele două reazeme apar reacţiunile H_A şi H_B. Din ecuaţia de proiecţii de forţe pe direcţia axei barei rezultă:

$$H_A = H_B = H \,.$$

Condiţia de deformaţie pe care trebuie să o respecte bara este:

$$\Delta l_{total} = \delta \,. \qquad (3.37)$$

Deformaţia totală a barei are o componentă datorată variaţiei de temperatură $\Delta l^{(t)}$ şi o componentă datorată solicitării mecanice $\Delta l^{(m)}$, unde

$$\Delta l^{(m)} = \frac{(-H)l_1}{E_1A_1} + \frac{(-H)l_2}{E_2A_2} \,. \qquad (3.38)$$

Introducând relaţiile (3.36) şi (3.38) în condiţia (3.37) se obţine:

$$(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\cdot\Delta t + \frac{(-H)l_1}{E_1A_1} + \frac{(-H)l_2}{E_2A_2} = \delta \,. \qquad (3.39)$$

Reacţiunea *H*, care constituie pentru bară forţa axială de compresiune, este:

$$H = \frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\cdot\Delta t - \delta}{\dfrac{l_1}{E_1A_1} + \dfrac{l_2}{E_2A_2}} \,. \qquad (3.40)$$

Tensiunile din cele două tronsoane ce apar ca urmare a dilatării împiedicate, sunt:

$$\sigma_1 = -\frac{H}{A_1} = -\frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\cdot \Delta t - \delta}{\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2 A_1}{E_2 A_2}};$$

$$\sigma_2 = -\frac{H}{A_2} = -\frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\cdot \Delta t - \delta}{\frac{l_1 A_2}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2}}.$$

Aplicaţia 3.5. Sistem de bare paralele articulate

Fie o bară rigidă, suspendată în poziţie orizontală cu trei bare verticale articulate la ambele capete, din materiale, secţiuni şi lungimi diferite. Să se calculeze eforturile din cele trei bare verticale dacă pe bara orizontală se aplică o forţă concentrată *F*, situată la distanţa *a* de bara 1 (fig. 3.15). Se consideră cunoscute mărimile: F, a, a_1, a_2, l_1, l_2, l_3, A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3.

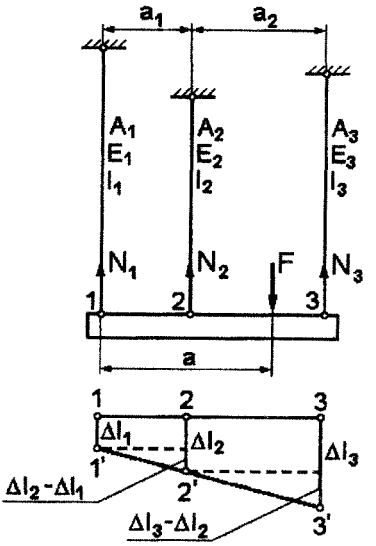


Fig. 3.15

Rezolvare

În cele trei bare verticale apar forţele axiale N_1, N_2, N_3. Se pot scrie două ecuaţii de echilibru:

- ecuaţia de proiecţii de forţe pe direcţie verticală,

$$N_1 + N_2 - F + N_3 = 0; \quad (3.41)$$

- ecuaţia de momente faţă de punctul 1,

$$N_2 \cdot a_1 - F \cdot a + N_3 \cdot a_2 = 0. \quad (3.42)$$

Deoarece sunt două ecuaţii cu trei necunoscute, problema este simplu static nedeterminată.

Ecuaţia suplimentară se scrie din condiţia ca bara dreaptă rigidă, să rămână dreaptă şi după deformarea tijelor verticale (puntele 1-2-3 rămân după deformarea barelor verticale tot pe o dreaptă, 1'-2'-3').

Din asemănarea triunghiurilor rezultă:

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a_1} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_2}{a_2}, \tag{3.43}$$

unde

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3}. \tag{3.44}$$

Înlocuind expresiile alungirilor (3.44) în condiția de deformație (3.43), se obține ecuația:

$$N_1 - N_2\left(1+\frac{a_1}{a_2}\right)\frac{l_2}{l_1}\frac{E_1A_1}{E_2A_2} + N_3\frac{a_1}{a_2}\frac{l_3}{l_1}\frac{E_1A_1}{E_3A_3} = 0. \tag{3.45}$$

Forțele axiale din cele trei bare se determină cu sistemul format de ecuațiile (3.41), (3.42) și (3.45).

Pentru cazul particular în care lungimile barelor sunt egale, se obține:

$$N_1 = F\frac{a_1^2\left(1+\frac{E_2A_2}{E_3A_3}\right) + 2a_1a_2 + a_2^2 - aa_2 - aa_1\left(1+\frac{E_2A_2}{E_3A_3}\right)}{a_1^2\left(1+\frac{E_2A_2}{E_3A_3}\right) + 2a_1a_2 + a_2^2\left(1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}\right)};$$

$$N_2 = F\frac{a_1a_2\frac{E_2A_2}{E_1A_1} + a_2^2\frac{E_2A_2}{E_1A_1} - aa_2\frac{E_2A_2}{E_1A_1} + aa_1\frac{E_2A_2}{E_3A_3}}{a_1^2\left(1+\frac{E_2A_2}{E_3A_3}\right) + 2a_1a_2 + a_2^2\left(1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}\right)};$$

$$N_3 = F\frac{-a_1a_2\frac{E_2A_2}{E_1A_1} + aa_2\left(1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}\right) + aa_1}{a_1^2\left(1+\frac{E_2A_2}{E_3A_3}\right) + 2a_1a_2 + a_2^2\left(1+\frac{E_2A_2}{E_1A_1}\right)}.$$

Sisteme de bare articulate, concurente

În cazul unei bare articulate la ambele capete (fig. 3.16), care face parte dintr-un sistem de bare, se poate scrie o relaţie între alungirea barei (produsă de forţa axială N şi o variaţie de temperatură Δt) şi proiecţiile deplasărilor capetelor barei, pe direcţia axei acesteia.

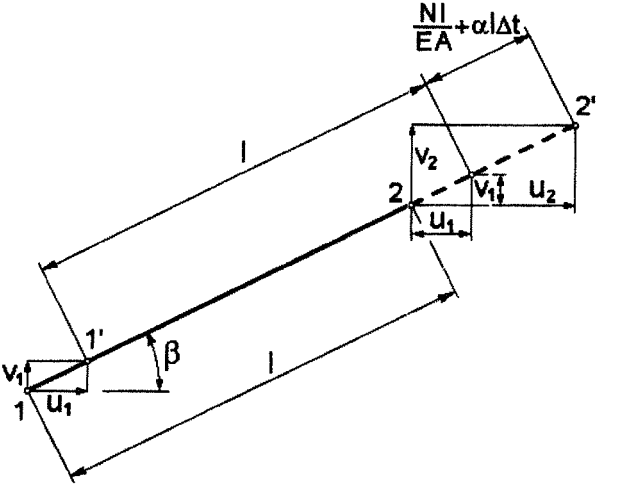


Fig. 3.16

Dacă se notează cu u_1, v_1 şi u_2, v_2 componentele deplasărilor capetelor barei pe direcţie orizontală şi verticală, atunci pentru bara din figura 3.16 această relaţia este:

$$\frac{Nl}{EA} + \alpha l \Delta t = -u_1 \cos\beta - v_1 \sin\beta + u_2 \cos\beta + v_2 \sin\beta \qquad (3.46)$$

Relaţia (3.46) exprimă faptul că *alungirea barei este egală cu suma algebrică a proiecţiilor componentelor deplasărilor, **u** şi **v**, pe direcţia axei barei.*

La scrierea relaţiei (3.46) proiecţiile componentelor deplasărilor sunt considerate pozitive dacă sensul acestora este spre exteriorul barei (ies din nod, semnifică alungirea barei).

Aplicaţia 3.6. Fie un sistem de trei bare articulate, dispuse ca în figura 3.17. La montaj se constată că bara 2 este mai scurtă cu mărimea δ. După montajul forţat, în nodul comun *C* se aplică forţa verticală *F*, iar întreg sistemul de bare este supus la o creştere de temperatură Δt. Să se determine forţele axiale din bare şi deplasarea nodului *C* dacă se cunosc mărmile: F, δ, Δt, β, $l_1=l_3$, l_2, $E_1A_1= E_2A_2= E_3A_3=EA$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$.

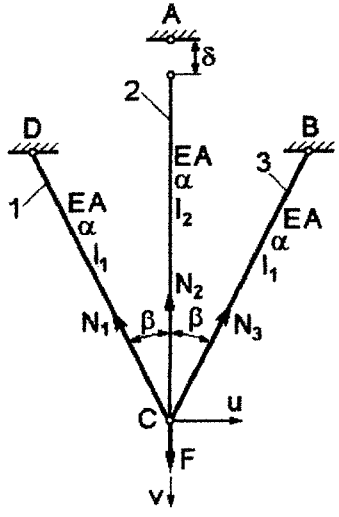


Fig. 3.17

Rezolvare

Ecuaţiile de echilibru în starea finală sunt:

$$-N_1\sin\beta + N_3\sin\beta = 0\ ; \quad (3.47)$$

$$N_1\cos\beta + N_2 + N_3\cos\beta - F = 0\ . (3.48)$$

Aceste ecuaţii se completează cu ecuaţiile ce exprimă relaţiile dintre alungirea fiecărei bare şi proiecţiile componentelor deplasărilor capetelor pe direcţia axei acesteia:

$$\frac{N_1 l_1}{EA} + \alpha l_1 \Delta t = u\sin\beta + v\cos\beta\ ; \quad (3.49)$$

$$\frac{N_2 l_2}{EA} + \alpha l_2 \Delta t = v + \delta\ ; \quad (3.50)$$

$$\frac{N_3 l_1}{EA} + \alpha l_1 \Delta t = -u\sin\beta + v\cos\beta\ . \quad (3.51)$$

Ecuaţiile (3.47), (3.48), (3.49), (3.50) şi (3.51) formează un sistem de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute: N_1, N_2, N_3, u şi v. Rezolvând acest sistem, se obţine:

$$N_1 = N_3 = \frac{Fl_2 + EA\left(\alpha l_2 \Delta t - \dfrac{\alpha l_1 \Delta t}{\cos\beta} - \delta\right)}{\dfrac{l_1}{\cos\beta} + 2l_2\cos\beta}\ ;$$

$$N_2 = \frac{\frac{Fl_1}{2\cos^2\beta} - EA\left(\alpha l_2 \Delta t - \frac{\alpha l_1 \Delta t}{\cos\beta} - \delta\right)}{\frac{l_1}{2\cos^2\beta} + l_2};$$

$$u = 0;$$

$$v = \frac{\frac{Fl_1}{EA} + \alpha l_1 \Delta t(1 + 2\cos\beta) - \frac{l_1}{l_2}\delta}{\frac{l_1}{l_2} + 2\cos^2\beta}.$$

Problema prezentată poate fi rezolvată şi prin suprapunerea efectelor date de inexactitatea de la montaj, variaţia de temperatură şi acţiunea forţei *F*, scriind în fiecare caz relaţiile geometrice dintre deformaţiile barelor. O asemenea variantă de rezolvare conduce la calcule foarte laborioase, pe când metoda folosită în această aplicaţie este deosebit de rapidă. În plus, condiţiile de deformaţii sunt greu de exprimat în cazul unor sisteme oarecare de bare, avantajul metodei prezentate fiind şi mai evident.

Aplicaţia 3.7. Se consideră sistemul de bare articulate concurente din figura 3.18, solicitat de forţa verticală *F*, aplicată în nodul comun, *C*. Să se calculeze forţele axiale din bare şi deplasarea nodului *C* dacă se cunosc mărimile: $l_1=l_3=l$, $l_2=2l$, $A_1=2A$, $A_2=A_3=A$, $E_1=E_2=E_3=E$, $\alpha_1=30°$, $\alpha_2=\alpha_3=60°$.

Rezolvare

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$N_1\cos\alpha_1 + N_2\cos\alpha_2 - N_3\cos\alpha_3 = 0\ ; \qquad (3.52)$$

$$N_1\sin\alpha_1 + N_2\sin\alpha_2 + N_3\sin\alpha_3 - F = 0\ . \qquad (3.53)$$

Ecuaţiile ce exprimă relaţiile dintre deformaţia fiecărei bare şi proiecţiile componentelor deplasărilor capetelor pe direcţia axei acesteia sunt:

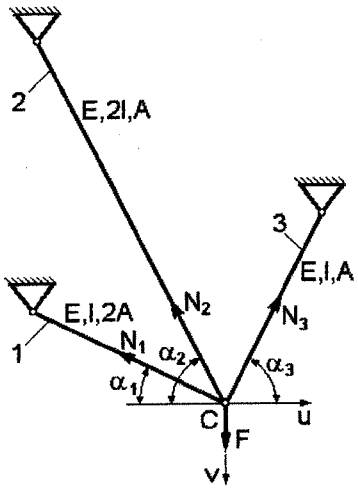


Fig. 3.18

$$u\cos\alpha_1 + v\sin\alpha_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad (3.54)$$

$$u\cos\alpha_2 + v\sin\alpha_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}; \quad (3.55)$$

$$-u\cos\alpha_3 + v\sin\alpha_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3}; \quad (3.56)$$

Ecuaţiile (3.52), (3.53), (3.54), (3.55) şi (3.56) formează un sistem de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute: N_1, N_2, N_3, u şi v.

Rezolvând acest sistem cu datele problemei, se obţine:

$$N_1 = \frac{2}{7}F; \quad N_2 = \frac{\sqrt{3}}{7}F; \quad N_3 = \frac{3\sqrt{3}}{7}F;$$

$$u = -\frac{\sqrt{3}}{7}\frac{Fl}{EA}; \quad v = \frac{5}{7}\frac{Fl}{EA}.$$

Punctul C se deplasează spre stânga (sens opus lui u) şi în jos (acelaşi sens cu v).

4. SOLICITAREA DE FORFECARE A BARELOR DREPTE

O bară dreaptă este supusă la forfecare dacă asupra ei acţionează două forţe egale şi de sens contrar, pe acelaşi suport, perpendicular pe axa barei (asemenea unei foarfece).

În realitate, forfecarea pură este foarte rar întâlnită deoarece sistemele practice nu pot asigura coincidenţa suporturilor celor două forţe exterioare (fig. 4.1). De regulă forfecarea apare însoţită de încovoiere. Deoarece distanţa δ dintre suporturile forţelor ce produc forfecarea este foarte mică, solicitarea de încovoiere se neglijează.

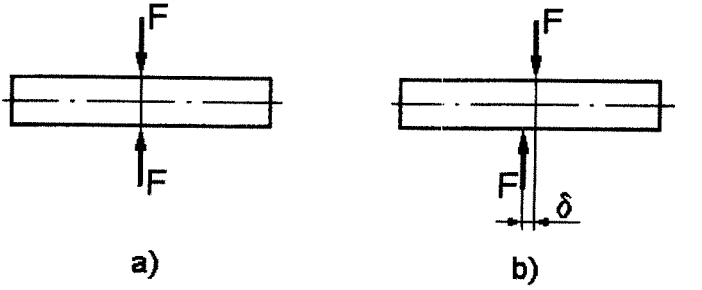


Fig. 4.1

În practică solicitarea de forfecare este întâlnită la toate elementele îmbinărilor (nituri, şuruburi, buloane, suduri, pene, caneluri etc.) când trebuie asigurată condiţia de rezistenţă, dar şi în cazul operaţiilor de ştanţare, decupare, când trebuie asigurată ruperea.

4.1. Calculul tensiunilor tangenţiale la solicitarea de forfecare

Pentru a stabili natura tensiunilor (σ sau τ) care apar în secţiunile transversale ale unei bare solicitată la forfecare, se consideră următorul experiment.

Pe o bară dreaptă, de secţiune dreptunghiulară, se trasează o serie de linii echidistante şi paralele cu axa barei şi altele perpendiculare pe acestea (de asemenea echidistante), astfel încât pe suprafaţa barei se realizează o reţea de dreptunghiuri (fig. 4.2a).

Solicitând la forfecare acestă bară, ea se deformează ca în figura 4.2b.

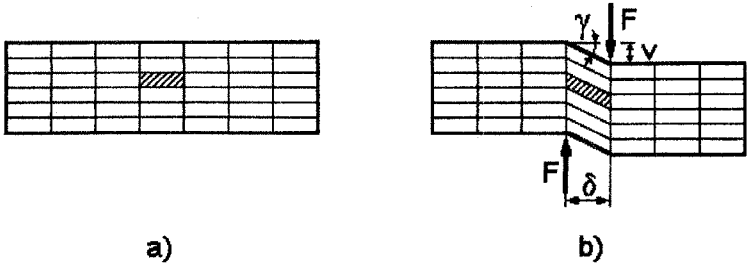


Fig. 4.2

Analizând rețeaua de linii de pe bara deformată, se fac următoarele constatări:

- lungimea elementelor rețelei nu s-a modificat, deci nu se produc alugiri; rezultă că deformațiile liniare specifice sunt nule, $\varepsilon = 0$ și în consecință conform legii lui Hooke, $\sigma = E \cdot \varepsilon$, tensiunile normale sunt nule, $\sigma = 0$;
- în rețeaua deformată se produc modificări ale unghiurilor drepte pe suprafețele paralele cu planul xOy; rezultă că se produc lunecări specifice, $\gamma_{xy} \neq 0$ și în consecință conform legii lui Hooke, $\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$, tensiunile tangențiale sunt diferite de zero, $\tau_{xy} \neq 0$;
- în rețeaua de pe suprafețele perpendiculare pe planul xOy nu se produc modificări ale unghiurilor drepte; rezultă că nu se produc lunecări specifice, $\gamma_{xz} = 0$ și în consecință conform legii lui Hooke, $\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$, tensiunile tangențiale sunt nule, $\tau_{xz} = 0$.

Rezultă că în cazul forfecării barei, în secțiunea de forfecare apar numai tensiuni tangențiale $\tau_{xy} = \tau$.

Pentru barele cu înălțimea mică a secțiunii transversale se face ipoteza simplificatoare că tensiunile tangențiale sunt uniform distribuite pe secțiune.

Având în vedere concluziile experimentului și ipoteza adoptată, se face o analiză a celor șase ecuații de echivalență, ținând seama și de faptul că în secțiunea transversală apare numai forța tăietoare $T_y = T$:

$$\begin{cases} N = \iint\limits_A \sigma_x \cdot dA \\ T_y = \iint\limits_A \tau_{xy} \cdot dA \\ T_z = \iint\limits_A \tau_{xz} \cdot dA \\ M_t = \iint\limits_A (z \cdot \tau_{xy} - y \cdot \tau_{xz}) \cdot dA \\ M_{iy} = -\iint\limits_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \\ M_{iz} = \iint\limits_A y \cdot \sigma_x \cdot dA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \equiv 0 \\ T = \tau \cdot \iint\limits_A dA \\ 0 \equiv 0 \\ 0 = \tau \iint\limits_A z \cdot dA \\ 0 \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \end{cases} \qquad (4.1)$$

Se constată că din cele şase ecuaţii de echivalenţă, patru sunt identităţi $0 \equiv 0$, iar în continuare se analizează cele două ecuaţii rămase.

Integrala din ultima ecuaţie reprezintă momentul static de inerţie S_y al secţiunii transversale, care este nul doarece sistemul de axe în care sunt definite eforturile este un sistem central (O≡G). Astfel această ecuaţie devine şi ea identitate 0≡0.

Din ecuaţia de echivalenţă rămasă rezultă relaţia pentru calculul tensiunilor tangenţiale la solicitarea de forfecare:

$$\boxed{\tau = \frac{T}{A}} \qquad (4.2)$$

Relaţia (4.2) permite efectuarea calculelor din condiţia de rezistenţă:

- pentru dimensionare,

$$A_{nec} = \frac{T}{\tau_a}; \qquad (4.3)$$

- pentru verificare,

$$\tau_{ef} = \frac{T}{A_{ef}} \leq \tau_a . \qquad (4.4)$$

4.2. Deformaţii şi deplasări la solicitarea de forfecare

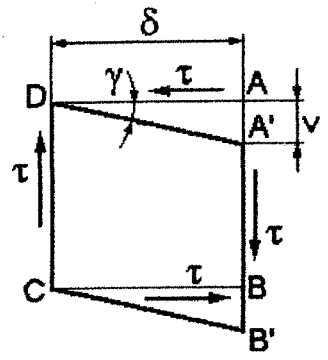


Fig. 4.3

Aşa cum se observă din figura 4.3, în cazul forfecării apar deformaţii unghiulare. Ca urmare a acestor deformaţii, se produce o deplasare relativă *v* a secţiunilor în care acţionează forţele *F*, aflate la distanţa δ una de cealaltă.

În ipoteza micilor deformaţii se poate scrie

$$\operatorname{tg}\gamma = \gamma = \frac{v}{\delta}. \qquad (4.5)$$

Ţinând cont de legea lui Hooke şi de relaţia (4.2), pentru calculul deplasării v rezultă,

$$v = \gamma \cdot \delta = \frac{\tau}{G}\delta = \frac{T\delta}{GA} \qquad (4.6)$$

unde produsul *GA* se numeşte *rigiditate la forfecare*.

4.3. Calculul energiei potenţiale de deformaţie

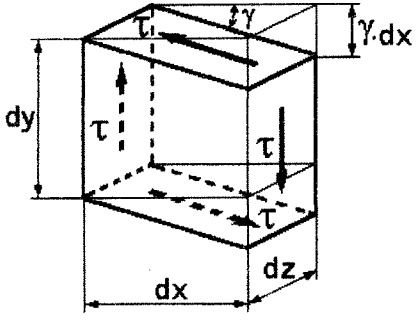


Fig. 4.4

Se consideră un element de volum *dV* izolat din materialul solicitat al unei bare supusă la forfecare (fig. 4.4).

Forţa dată de tensiunile tangenţiale, τdydz, îşi deplasează punctul de aplicaţie pe distanţa γdx, efectuând un lucru mecanic care se înmagazinează în material sub formă de energie potenţială de deformaţie.

Având în vedere caracterul elastic al forţelor interioare, energia potenţială de deformaţie, *dU*, înmagazinată în volumul elementar *dV*, este:

$$dU = \frac{(\tau dydz)(\gamma dx)}{2} = \frac{\tau\gamma}{2} dV . \qquad (4.7)$$

Ţinând cont de legea lui Hooke şi de relaţia (4.2), energia potenţială de deformaţie înmagazinată în bară este

$$U = \iiint_{(V)} \frac{\tau\gamma}{2} dV = \iiint_{(V)} \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_{(l)} \frac{T^2}{2GA} dx . \qquad (4.8)$$

În cazul barei din figura 4.2b lungimea barei care participă la solicitare este δ, foarte mică, iar energia potenţială de deformaţie calculată cu relaţia (4.8) este

$$U = \frac{T^2 \delta}{2GA} \approx 0 . \qquad (4.9)$$

Deoarece la forfecare volumul supus deformării este foarte mic, energia potenţială de deformare este de obicei neglijată în calculele bazate pe metode energetice.

4.4. Dualitatea tensiunilor tangenţiale

Se consideră un element de volum izolat din materialul solicitat al unei bare supusă la forfecare (fig. 4.5).

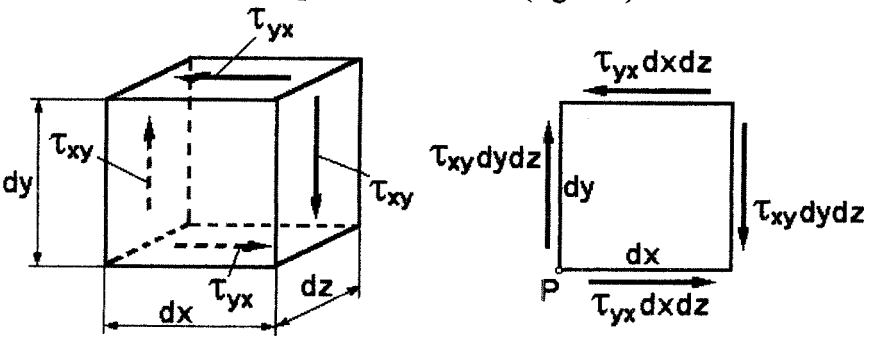


Fig. 4.5

Pe suprafeţele *dydz*, paralele cu secţiunile de forfecare acţionează tensiunile tangenţiale τ_{xy}, egale şi de sens contrar. Pe suprafeţele *dxdz*, perpendiculare pe secţiunile de forfecare, se face ipoteza că acţionează tensiunile tangenţiale egale şi de sens contrar τ_{yx}.

Ecuaţia de momente faţă de punctul *P*, a forţelor ce acţionează asupra elementului de volum izolat este:

$$\tau_{xy}dydz\cdot dx - \tau_{yx}dxdz\cdot dy = 0 . \qquad (4.10)$$

Rezultă:

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}} \qquad (4.11)$$

Relaţia (4.11) constituie expresia matematică cea mai simplă a *principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale* care se enunţă astfel: ***Pe două elemente de suprafaţă ortogonale, componentele tensiunilor tangenţiale perpendiculare pe muchia comună sunt egale şi opuse*** *(converg sau diverg faţă de dreapta de intersecţie).*

4.5. Relaţia între caracteristicile elastice E, G şi ν

Dintr-o bară solicitată la tracţiune se izolează un element de volum de forma unui cub cu laturile egale cu unitatea, două din feţele acestuia fiind conţinute în secţiunile transversale.

Pe direcţia forţei elementul de volum se va alungi, iar pe direcţia perpendiculară va suferi o contracţie transversală, transformându-se din cub, într-un paralelipiped (fig. 4.6).

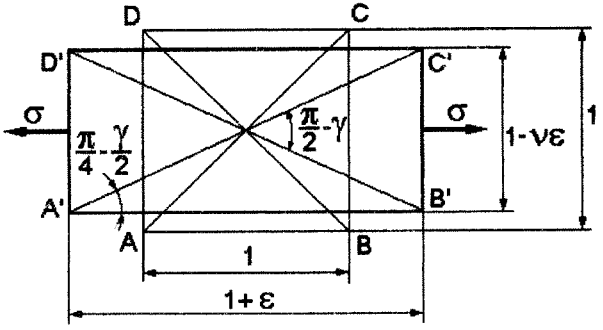


Fig. 4.6

Unghiul dintre planele diagonale ale cubului care iniţial era $\pi/2$, devine după deformare $\pi/2 - \gamma$. Unghiul γ reprezintă lunecarea specifică produsă de tensiunile tangenţiale ce acţionează în planele diagonale, în care tensiunea tangenţială este maximă şi are valoarea (v. §3.5)

$$\tau_{max} = \sigma/2. \tag{4.12}$$

Din triunghiul A'C'B' se obţine:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1-\nu\varepsilon}{1+\varepsilon}. \tag{4.13}$$

În baza ipotezei deformaţiilor mici se poate considera că $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$ iar relaţia (4.12) devine

$$\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}} = \frac{1-\nu\varepsilon}{1+\varepsilon}. \tag{4.14}$$

Neglijând infiniţii mici de ordin superior rezultă

$$\varepsilon(1+\nu) = \gamma. \tag{4.15}$$

Pe baza legii lui Hooke şi a relaţiei (4.12) se poate scrie:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{2G}. \tag{4.16}$$

Înlocuind deformaţiile specifice (4.16) în relaţia (4.15) se obţine

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \tag{4.17}$$

4.6. Tensiuni din secţiuni înclinate la forfecarea pură

Un element de volum $dV = dxdydz$, izolat dintr-o bară, se află în starea de forfecare pură dacă pe feţele acestuia acţionează numai tensiuni tangenţiale.

Prezenţa tensiunilor tangenţiale $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ corespunde forfecării pure în planul xOy.

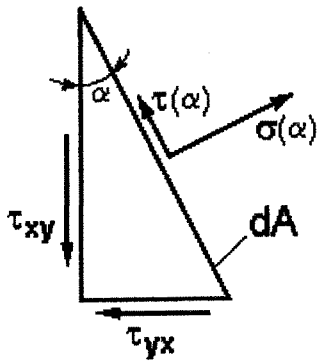


Fig. 4.7

În figura 4.7 este prezentat un astfel de element de volum în care s-a efectuat o secţiune înclinată cu unghiul $\propto$ faţa de secţiunea transversală a barei.

Pe feţele paralele cu planele yOz şi xOz acţionează tensiunile tangenţiale $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$, iar pe faţa înclinată, cu suprafaţa *dA*, tensiunea normală $\sigma(\propto)$ şi tensiunea tangenţială $\tau(\propto)$.

Ecuaţiile de echilibru ale acestui element sunt:

$$\sigma(\propto)\cdot dA - \tau_{xy}dA\cos\propto\sin\propto - \tau_{yx}dA\sin\propto\cos\propto = 0; \quad (4.18)$$

$$\tau(\propto)\cdot dA - \tau_{xy}dA\cos\propto\cos\propto - \tau_{yx}dA\sin\propto\sin\propto = 0. \quad (4.19)$$

Rezolvând sistemul format de ecuaţiile (4.18) şi (4.19) se obţine:

$$\sigma(\propto) = \tau\cdot\sin 2\propto ; \quad (4.20)$$

$$\tau(\propto) = \tau\cdot\cos 2\propto . \quad (4.21)$$

Pe baza acestor relaţii se poate studia variaţia tensiunilor $\sigma(\alpha)$ şi $\tau(\alpha)$ în funcţie de unghiul $\alpha\in(0,\pi)$. Se găseşte că:

- $\sigma(\alpha)_{max} = \tau$ la $\alpha=\pi/4$;
  $\sigma(\alpha)_{min} = -\tau$ la $\alpha= 3\pi/4$;
  $\sigma(\propto) = 0$ la $\propto = 0$, $\propto = \pi$ (secţiunea transversală)
  şi $\propto = \pi/2$ (secţiune longitudinală);
- $\tau(\alpha)_{max} = \tau$ la $\alpha = 0$ şi $\propto = \pi$ (secţiunea transversală);
  $\tau(\alpha)_{min} = -\tau$ la $\alpha = \pi/2$ (secţiune longitudinală);
  $\tau(\alpha) = 0$ la $\alpha = \pi/4$ şi $\alpha= 3\pi/4$.

Se poate da o interpretare grafică variaţiei tensiunilor $\sigma(\alpha)$ şi $\tau(\alpha)$ în funcţie de unghiul α, cu ajutorul *cercului lui Mohr*.

Eliminând unghiul α între relaţiile (4.20) şi (4.21) se obţine ecuaţia:

$$\sigma^2(\propto) + \tau^2(\propto) = \tau^2 . \quad (4.22)$$

Într-un sistem de axe de coordonate $\sigma(\alpha)$ şi $\tau(\alpha)$, ecuaţia (4.22) reprezintă un cerc de rază τ cu centrul în origine, figura 4.8.

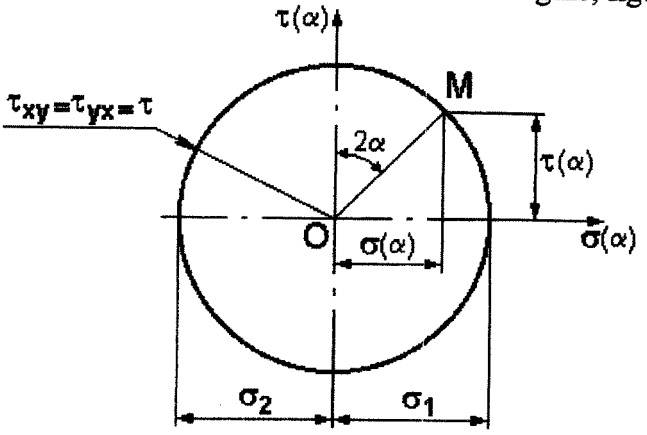


Fig. 4.8

Tensiunile $\sigma(\alpha)$ şi $\tau(\alpha)$ dintr-o secţiune înclinată cu unghiul α, sunt date de coordonatele punctului *M* de pe cerc.

4.7. Aplicaţii

Aplicaţia 4.1. Să se calculeze forţa de tăiere necasară unei prese pentru a efectua ştanţarea piesei cu forma şi dimensiunile din figura 4.9, dacă semifabricatul este tablă de oţel cu rezistenţa de rupere la forfecare $\tau_r = 400$ MPa.
Se cunosc: a = 20 mm; b = 80 mm; g = 3 mm.

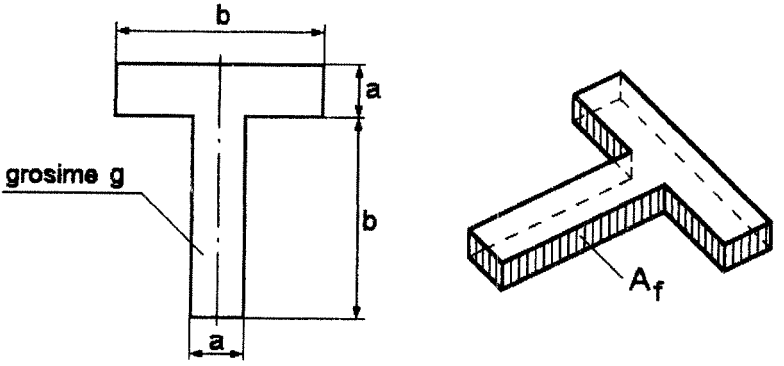


Fig. 4.9

Rezolvare

În cazul tăierii la ştanţe cu muchii paralele, forţa minimă de tăiere se calculează cu relaţia

$$F_{min} = A_f \cdot \tau_r \qquad (4.23)$$

în care A_f este aria secţiunii de rupere prin forfecare;

τ_r rezistenţa de rupere la forfecare.

Pentru această aplicaţie,

$$A_f = 3(a + b)\cdot g = 3(20 + 80)\cdot 3 = 900 \text{ mm}^2.$$

Forţa minimă necesară pentru ştanţare este

$$F_{min} = 900 \cdot 400 = 360\,000 \text{ N}.$$

Forţa de tăiere a presei F_p, trebuie să fie mai mare pentru a compensa neuniformităţile grosimii semifabricatului, ale proprietăţilor materialului, frecările, jocurile etc.

$$F_p = 1{,}25 \cdot F_{min} = 1{,}25 \cdot 360\,000 = 450\,000 \text{ N}.$$

Aplicaţia 4.2. Să se dimensioneze elementele îmbinării din figura 4.10, executate din acelaşi material, dacă asupra tijei şi respectiv furcii, acţionează forţele de tracţiune F = 80 kN.

Se cunosc σ_a = 150 MPa, τ_a = 90 MPa; $\sigma_{a\,str}$ = 200 MPa.

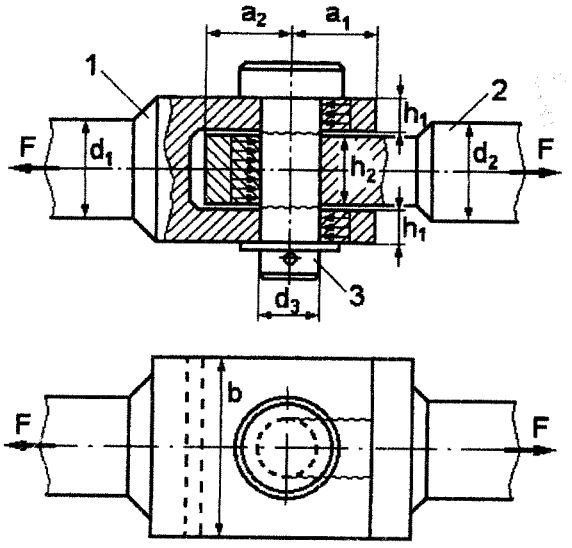


Fig. 4.10

Rezolvare

Pentru elementele îmbinării se disting următoarele solicitări:

1) Întindere pentru tijă şi furcă;

$$A_{nec} = \frac{F}{\sigma_a} = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d_1 = d_2 = \sqrt{\frac{4F}{\pi\sigma_a}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 80000}{\pi \cdot 150}} = 26\text{mm}.$$

2) Forfecarea bolţului (3) în două secţiuni;

$$A_{nec} = \frac{F}{\tau_a} = 2 \cdot \frac{\pi d_3^2}{4} \Rightarrow d_3 = \sqrt{\frac{2F}{\pi\tau_a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80000}{\pi \cdot 90}} = 23{,}8 \approx 24\text{mm}.$$

3) Strivire pe suprafeţele de contact dintre bolţ şi tijă, respectiv dintre bolţ şi furcă;

Contactul dintre bolţ şi tijă, respectiv furcă, se realizează pe suprafeţe semicilindrice, presiunea fiind distribuită neuniform; în calcule se admite ipoteza unei distribuţii uniforme pe direcţie radială (fig. 4.11a).

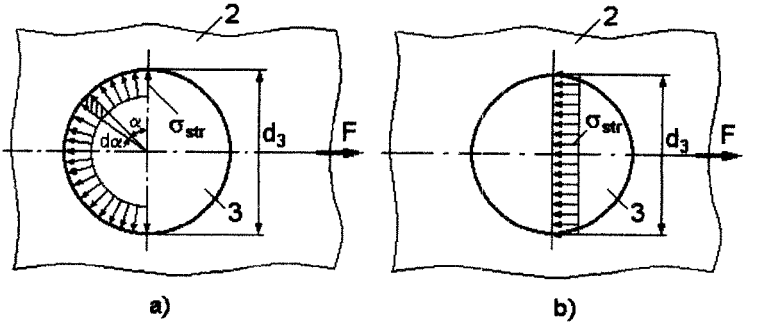


Fig. 4.11

Tija (2) se află în echilibru sub acţiunea forţei F şi a forţei date de tensiunile de strivire dintre tijă şi bolţ (fig. 4.11a). Ecuaţia de echilibru este:

$$F - \int_0^{\pi} \sigma_{str} h_2 \frac{d_3}{2} \sin\alpha d\alpha = 0 \quad \Rightarrow \qquad F = \sigma_{str}\, h_2 \cdot d_3 .$$

Se observă că ultima relaţie poate fi obţinută dacă tensiunea de strivire se consideră uniform distribuită pe suprafaţa dreptunghiulară $h_2 \cdot d_3$ (fig. 4.11b):

$$\sigma_{str} = \frac{F}{h_2 d_3}.$$

Din condiția de rezistență la strivire rezultă:

$$h_2 = \frac{F}{\sigma_{astr} d_3} = \frac{80000}{200 \cdot 24} = 16{,}66 \approx 17\text{mm}.$$

Analog, impunând condiția de rezistență la strivire între furcă și bolț, se obține

$$h_1 = \frac{F}{2\sigma_{astr} d_3} = \frac{h_2}{2} = 8{,}5\text{mm}.$$

4) Forfecarea tijei și respectiv a furcii;

- pentru tijă:

$$A_{nec} = \frac{F}{\tau_a} = 2a_2 h_2 \Rightarrow a_2 = \frac{F}{2\tau_a h_2} = \frac{80000}{2 \cdot 90 \cdot 17} = 26{,}2 \approx 27\text{mm};$$

- pentru furcă:

$$A_{nec} = \frac{F}{\tau_a} = 4a_1 h_1 \Rightarrow a_1 = \frac{F}{4\tau_a h_1} = a_2 = 27\,\text{mm};$$

5) Întinderea capului tijei, respectiv furcii

- pentru capul tijei:

$$A_{nec} = \frac{F}{\sigma_a} = (b_2 - d_3)h_2 \Rightarrow$$

$$b_2 = d_3 + \frac{F}{\sigma_a h_2} = 26 + \frac{80000}{150 \cdot 17} = 57{,}4 \approx 58\,\text{mm}$$

- pentru capul furcii:

$$A_{nec} = \frac{F}{\sigma_a} = 2(b_1 - d_3)h_1 \Rightarrow b_1 = d_3 + \frac{F}{2\sigma_a h_1} = b_2 = 58\,\text{mm}.$$

Aplicația 4.3. Să se dimensioneze îmbinarea sudată din figura 4.12 dacă F = 100 kN, σ_a = 140 MPa și τ_{as} = 90 MPa, h = 5 mm.

Rezolvare

Cordoanele de sudură sunt supuse la forfecare. Secțiunea de forfecare este secțiunea minimă și este prezentată în figura 4.13.

Din condiția de rezistență la forfecare a sudurii se obține:

$$A_{nec} = \frac{F}{\tau_{as}} = 4 \cdot l_c a = 4 \cdot l_c \cdot \frac{h}{\sqrt{2}} \Rightarrow l_c = \frac{F\sqrt{2}}{4\tau_{as} h} = \frac{100000\sqrt{2}}{4 \cdot 90 \cdot 5} = 78{,}6\text{mm}.$$

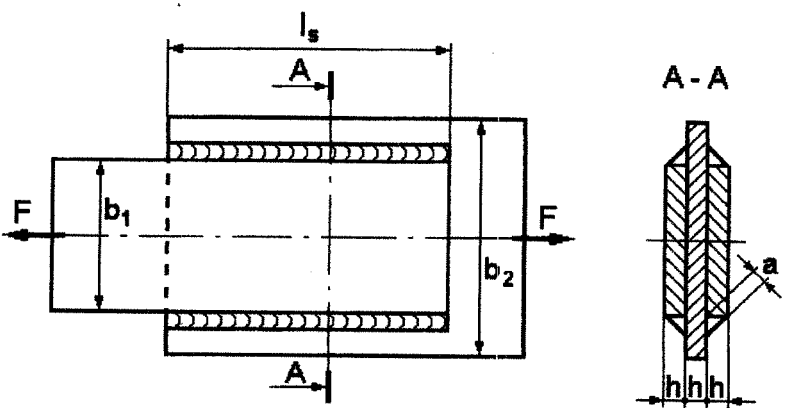


Fig. 4.12

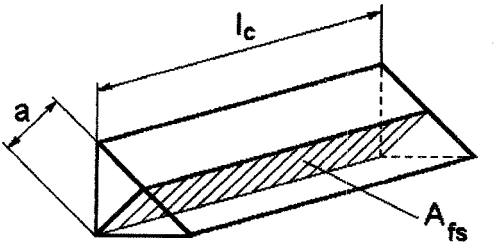


Fig. 4.13

Lungimea efectivă a unui cordon de sudură l_s, este lungimea de calcul l_c la care se adaugă două grosimi ale cordonului a:

$$l_s = l_c + 2a = 78{,}6 + 2 \cdot 3{,}5 = 85{,}6 \approx 86\text{mm}.$$

Tablele sunt supuse la întindere iar din condiţia de rezistenţă rezultă:

- pentru tabla din mijloc,

$$A_{nec} = \frac{F}{\sigma_a} = b_2 h \Rightarrow b_2 = \frac{F}{\sigma_a h} = \frac{100000}{140 \cdot 5} = 142{,}8 \approx 143\text{mm};$$

- pentru tablele laterale,

$$A_{nec} = \frac{F}{\sigma_a} = 2 \cdot b_1 h \Rightarrow b_1 = \frac{F}{2\sigma_a h} = \frac{b_2}{2} = 71{,}5\ \text{mm}.$$

5. SOLICITAREA DE RĂSUCIRE A BARELOR DREPTE DE SECȚIUNE CIRCULARĂ

O bară dreaptă este supusă la răsucire dacă asupra ei acționează cupluri de forțe (momente) ale căror vectori sunt dirijați în lungul axei barei .

Cazul cel mai simplu de solicitare la răsucire este prezentat în figura 5.1.

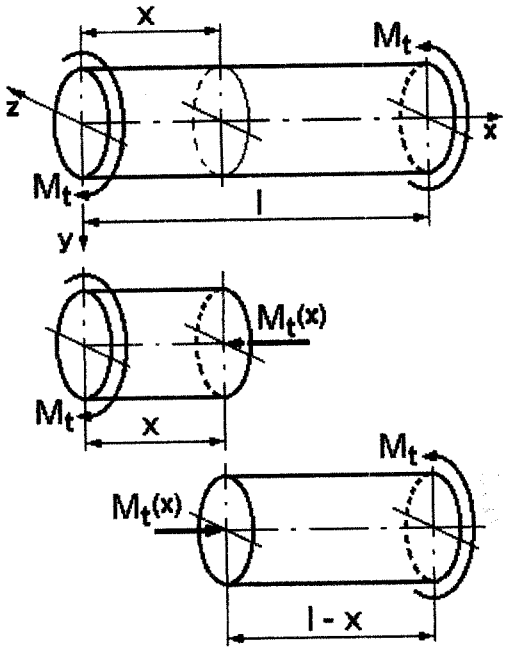


Fig. 5.1

Solicitarea de răsucire se caracterizează prin:

- rotirea secțiunilor transversale în jurul axei barei;
- apariția în secțiunile transversale numai a momentelor de torsiune $M_t(x)$.

Dacă în lungul axei barei sunt aplicate mai multe momente de torsiune, eforturile $M_t(x)$ variază și în acest caz este necesară trasarea diagramei de momente de torsiune (§ 2.1.4).

5.1. Calculul tensiunilor tangenţiale la solicitarea de răsucire

Pentru a stabili natura tensiunilor (σ sau τ) care apar în secţiunile transversale ale unei bare drepte de secţiune circulară solicitată la răsucire, se consideră următorul experiment.

Pe suprafaţa exterioară a barei, se trasează o serie de generatoare echidistante şi o serie de cercuri directoare (de asemenea echidistante), astfel încât pe suprafaţa barei se realizează o reţea de dreptunghiuri (fig. 5.2a). Solicitând la răsucire acestă bară, ea se deformează ca în figura 5.2b.

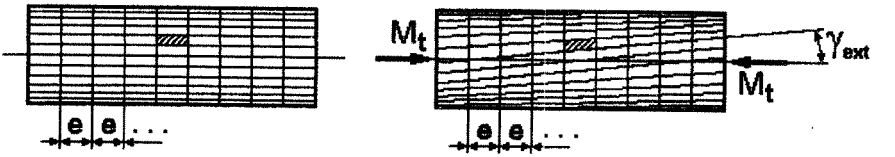


Fig. 5.2

Analizând reţeaua de linii de pe bara deformată, se fac următoarele constatări:

- cercurile au rămas tot cercuri, fapt ce confirmă ipoteza lui Bernoulli, a secţiunilor plane (pentru bare cu altă formă a secţiunii transversale, această ipoteză nu se verifică experimental);
- distanţa dintre cercuri nu s-a modificat, deci se nu produc alungiri; rezultă că deformaţiile liniare specifice sunt nule, $\varepsilon = 0$ şi în consecinţă conform legii lui Hooke, $\sigma = E \cdot \varepsilon$, tensiunile normale sunt nule, $\sigma = 0$;
- în reţeaua deformată se produc modificări ale unghiurilor drepte; rezultă că se produc lunecări specifice, $\gamma \neq 0$ şi în consecinţă conform legii lui Hooke, $\tau = G \cdot \gamma$, tensiunile tangenţiale sunt diferite de zero, $\tau \neq 0$;

Admiţând că fenomenul se produce la fel şi în interior, se poate trage concluzia că la solicitarea de răsucire a acestei categorii de bare, în secţiunile transversale apar numai tensiuni tangenţiale.

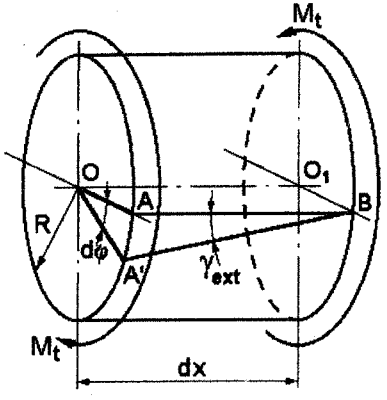


Fig. 5.3

Pentru a stabili modul de distribuţie a tensiunilor tangenţiale în secţiunea transversală, se izolează un element de lungime *dx*, prin secţionarea barei cu două plane perpendiculare pe axa acesteia (fig. 5.3). Considerând secţiunea din O_1 fixă, o generatoare oarecare *AB* de pe suprafaţa exterioară ocupă după deformaţie poziţia *A'B*, ca urmare a rotirii secţiunii *O* cu unghiul dφ; în acelaşi timp, raza *OA* ajunge în poziţia *OA'*, rămânând tot dreaptă.

În triunghiul dreptunghic *A'AB* se poate scrie relaţia:

$$\operatorname{tg}\gamma_{ext} = \frac{AA'}{AB} = \frac{R d\varphi}{dx}. \qquad (5.1)$$

Dacă se notează

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad (5.2)$$

unde θ este *rotirea specifică* şi se admite că tg $\gamma_{ext} \approx \gamma_{ext}$ (ipoteza deformaţiilor mici), relaţia (5.1) devine:

$$\gamma_{ext} = R \cdot \theta . \qquad (5.3)$$

Similar, dacă se consideră o fibră longitudinală paralelă cu generatoarea *AB*, situată în interiorul barei la raza *r*, se poate scrie relaţia:

$$\gamma(r) = r \cdot \theta . \qquad (5.4)$$

Dacă se elimină θ între relaţiile (5.3) şi (5.4) şi se ţine seama de legea lui Hooke, se obţine pentru tensiunea tangenţială o lege de variaţie liniară:

$$\tau(r) = \frac{r}{R}\tau_{max} . \qquad (5.5)$$

Deoarece suprafaţa exterioară a barei este neîncărcată, tensiunile tangenţiale sunt nule pe toate direcţiile, deci şi pe direcţiile longitudinală, respectiv circumferenţială ($\tau_l = 0$, $\tau_c = 0$, fig. 5.4). Conform principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale, tensiunile pe direcţie radială (τ_r) din secţiunea transversală respectiv longitudinală, sunt nule.

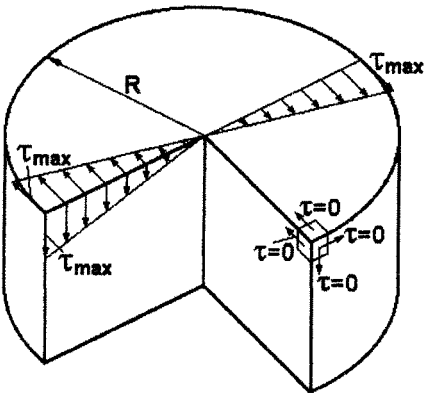


Fig. 5.4

Rezultă că în punctele secţiunii transversale aflate la raza *R* tensiunea tangenţială are valoarea maximă şi este dirijată pe direcţia perpendicularei pe rază.

Se face ipoteza că şi în interior, în orice punct din secţiune, tensiunea tangenţială este perpendiculară pe direcţia razei respective, orientată astfel încât să se opună momentului de torsiune exterior (fig. 5.4).

Având în vedere concluziile experimentului şi consideraţiile de mai sus, se face o analiză a celor şase ecuaţii de echivalenţă, ţinând seama şi de faptul că într-o secţiune transversală apare numai momentul de torsiune:

$$\begin{cases} N = \iint_A \sigma_x \cdot dA \\ T_y = \iint_A \tau_{xy} \cdot dA \\ T_z = \iint_A \tau_{xz} \cdot dA \\ M_t = \iint_A (z \cdot \tau_{xy} - y \cdot \tau_{xz}) \cdot dA \\ M_{iy} = -\iint_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \\ M_{iz} = \iint_A y \cdot \sigma_x \cdot dA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \equiv 0 \\ 0 = \iint_A \tau_{xy} \cdot dA \\ 0 = \iint_A \tau_{xz} \cdot dA \\ M_t = \iint_A (z \cdot \tau_{xy} - y \cdot \tau_{xz}) \cdot dA \\ 0 \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

În ecuaţiile (5.6), τ_{xy} şi τ_{xz} sunt componentele tensiunii tangenţiale $\tau(r)$, dintr-un punct oarecare de coordonate $z = r\cdot\cos\alpha$, $y = r\cdot\sin\alpha$ (fig. 5.5):

$$\tau_{xy} = \tau(r)\cdot\cos\alpha; \tag{5.7}$$

$$\tau_{xz} = -\tau(r)\cdot\sin\alpha. \tag{5.8}$$

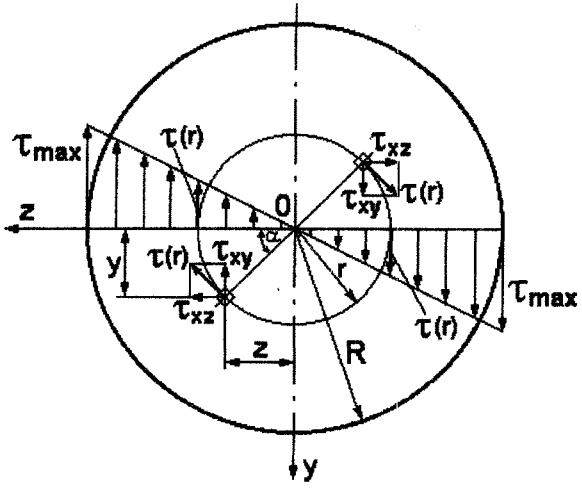


Fig. 5.5

Se constată că din cele şase ecuaţii de echivalenţă, trei sunt identităţi $0 \equiv 0$, iar în continuare se analizează cele trei ecuaţii rămase.

Ţinând seama de relaţiile (5.5), (5.7) şi (5.8), primele două ecuaţii ale sistemului (5.6) devin:

$$0 = \frac{\tau_{max}}{R}\iint_A z\,dA = \frac{\tau_{max}}{R}\cdot S_y; \tag{5.9}$$

$$0 = -\frac{\tau_{max}}{R}\iint_A y\,dA = -\frac{\tau_{max}}{R}\cdot S_z. \tag{5.10}$$

unde S_y , S_z sunt momentele statice de inerţie ale secţiunii transversale în raport cu axele *Oz* şi respectiv *Oy*.

Deoarece sistemul de axe în care sunt definite eforturile este un sistem central ($O \equiv G$), momentele statice de inerţie sunt nule şi deci aceste două ecuaţii devin identităţi, $0 \equiv 0$.

Introducând relaţiile (5.5), (5.7) şi (5.8) în ultima ecuaţie din sistemul (5.6) se obţine:

$$M_t = \frac{\tau_{max}}{R} \iint_A r^2 \cdot dA = \frac{\tau_{max}}{R} I_p \qquad (5.11)$$

unde I_p este momentul de inerţie polar al secţiunii transversale.

Pe baza relaţiei (5.11), pentru tensiunea tangenţială maximă dintr-o secţiune transversală oarecare x, rezultă expresia:

$$\boxed{\tau_{max}(x) = \frac{M_t(x)}{W_p(x)}} \qquad (5.12)$$

în care

$$\boxed{W_p(x) = \frac{I_p(x)}{R(x)}} \qquad (5.13)$$

este *modulul de rezistenţă polar* sau *modulul de rezistenţă la răsucire* al secţiunii.

Cu relaţiile (5.5) şi (5.12), pentru tensiunea tangenţială dintr-un punct oarecare al secţiunii transversale x, aflat la raza r, se obţine:

$$\tau(x,r) = \frac{M_t(x) \cdot r}{I_p(x)}. \qquad (5.14)$$

Relaţia (5.12) permite efectuarea calculelor de dimensionare şi de verificare din condiţia de rezistenţă. În cazul barelor de secţiune constantă aceste relaţii sunt:

- pentru *dimensionare*,

$$W_{pnec} = \frac{|M_{tmax}|}{\tau_a}; \qquad (5.15)$$

- pentru *verificare*,

$$\tau_{max} = \frac{|M_{tmax}|}{W_p} \le \tau_a. \qquad (5.16)$$

În figura 5.6a se observă că nu toate punctele secţiunii transversale sunt la fel de solicitate: tensiunile sunt mari spre exterior şi mici spre interior, fiind chiar nule în centrul de greutate. Rezultă că în zona din vecinătatea centrului de greutate, materialul nu este folosit raţional. În consecinţă, mai economică este secţiunea circulară inelară, în care tensiunile tangenţiale nu variază între zero şi o valoare maximă, ci între o valoare minimă nenulă şi una maximă (fig. 5.6b).

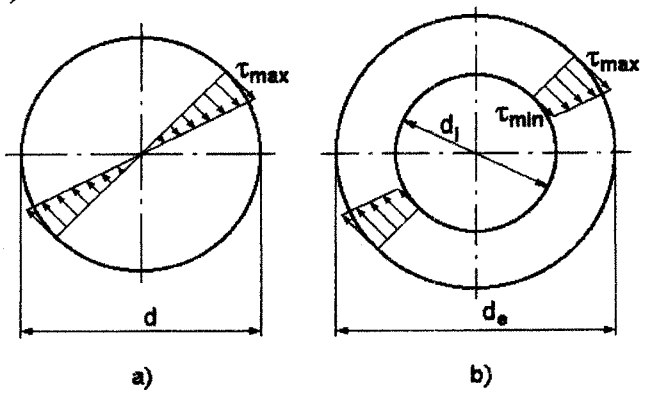


Fig. 5.6

Pentru secţiunile prezentate în figura 5.6, caracteristicile geometrice necesare calculelor la răsucire sunt:

- secţiunea circulară plină (fig. 5.6a),

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \tag{5.17}$$

- secţiunea circulară inelară (fig. 5.6b),

$$I_p = \frac{\pi\left(d_e^4 - d_i^4\right)}{32}; \quad W_p = \frac{\pi\left(d_e^4 - d_i^4\right)}{16 d_e}. \tag{5.18}$$

5.2. Calculul deformaţiilor la solicitarea de răsucire

Două secţiuni transversale ale unei bare drepte supusă la răsucire aflate la distanţa *dx* una de alta (fig. 5.3), se rotesc una faţă de cealaltă cu unghiul $d\varphi = \theta \cdot dx$. În baza relaţiilor (5.4), (5.14) şi a legii lui Hooke, pentru *rotirea specifică* θ rezultă expresia:

$$\theta(x) = \frac{M_t(x)}{GI_p(x)} \tag{5.19}$$

unde produsul $G \cdot I_p(x)$ este *rigiditatea la răsucire* a secţiunii barei.

Rotirea relativă a două secţiuni transversale aflate la distanţa *l* una de alta este:

$$\Delta\varphi = \int_{(l)} \theta(x)dx = \int_{(l)} \frac{M_t(x)}{GI_p(x)}dx \tag{5.20}$$

În cazul particular al unei bare cu aceeaşi secţiune pe lungimea *l*, solicitată de un moment de torsiune constant, relaţia (5.20) devine:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_p}. \tag{5.21}$$

În practică, de multe ori, pentru a asigura buna funcţionare a unor instalaţii, este necesară impunerea *condiţiei de rigiditate* (de deformaţie):

$$\theta_{max} \le \theta_a . \tag{5.22}$$

Relaţia (5.19) permite efectuarea calculelor de dimensionare şi de verificare din condiţia de rigiditate. În cazul barelor de secţiune constantă aceste relaţii sunt:

- pentru *dimensionare*,

$$I_{pnec} = \frac{|M_{t\,max}|}{G\theta_a}; \tag{5.23}$$

- pentru *verificare*,

$$\theta_{max} = \frac{|M_{t\,max}|}{GI_p} \le \theta_a . \tag{5.24}$$

5.3. Calculul energiei potenţiale de deformaţie

Deoarece în secţiunea transversală a barei drepte de secţiune circulară solicitată la răsucire apar numai tensiuni tangenţiale τ, energia potenţială de deformaţie înmagazinată într-un volum elementar (v. § 4.3) este:

$$dU = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} dV .$$

Ţinând seama de legea lui Hooke, de relaţia (5.14) şi de faptul că $dV = dA \cdot dx$, energia potenţială de deformaţie înmagazinată în bară este:

$$U = \iiint_{(V)} \frac{\tau^2(x,r)}{2G} dV = \iiint_{(V)} \frac{M_t^2(x) \cdot r^2}{2GI_p^2(x)} dV =$$

$$= \int_{(l)} \frac{M_t^2(x)}{2GI_p^2(x)} \left(\iint_{(A)} r^2 dA \right) dx = \int_{(l)} \frac{M_t^2(x)}{2GI_p^2(x)} I_p(x) dx = \int_{(l)} \frac{M_t^2(x)}{2GI_p(x)} dx$$

Se obţine deci:

$$\boxed{U = \int_{(l)} \frac{M_t^2(x)}{2GI_p(x)} dx} \qquad (5.25)$$

Pentru cazul particular al unei bare de secţiune constantă, solicitată de un moment de torsiune constant M_t, energia potenţială de deformaţie este:

$$U = \frac{M_t^2 l}{2GI_p} . \qquad (5.26)$$

5.4. Concentratori de tensiuni

Fenomenul de concentrare a tensiunilor se manifestă puternic în cazul arborilor de transmisie la care apar o serie de concentratori, cum ar fi: canale de pană, filete, găuri transversale, degajări pentru montarea rulmenţilor, treceri bruşte de la un diametru la altul etc.

Tensiunile maxime în zona concentratorilor se determină cu relaţia:

$$\tau_{max} = \alpha_k \cdot \tau_n \qquad (5.27)$$

unde α_k este coeficientul de concentrare a tensiunilor, care depinde de elementele geometrice ale concentratorului ($\alpha_k > 1$);

τ_n - tensiunea tangenţială nominală din secţiunea minimă.

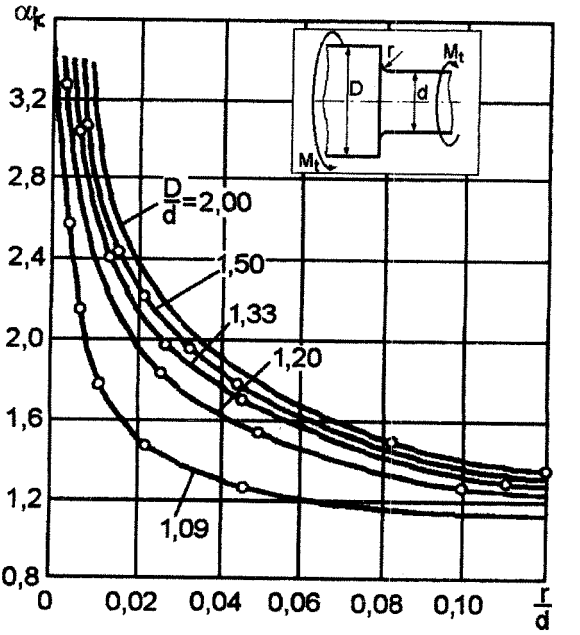


Fig. 5.7

În figura 5.7 este prezentat un exemplu de concentrator de tensiune (raza de racordare de la schimbarea bruscă a diametrului) precum şi variaţia coeficientului de concentrare a tensiunilor α_k, în funcţie de raportul dintre raza de racordare şi diametrul minim.

5.5. Tensiuni din secţiuni înclinate la solicitarea de răsucire

Dacă dintr-o bară dreaptă, de secţiune circulară, supusă la răsucire, se izolează un volum elementar prin două secţiuni transversale, două plane diametrale şi două suprafeţe cilindrice de raze r şi respectiv $r + dr$, atunci acesta se află într-o stare de forfecare pură (fig. 5.8).

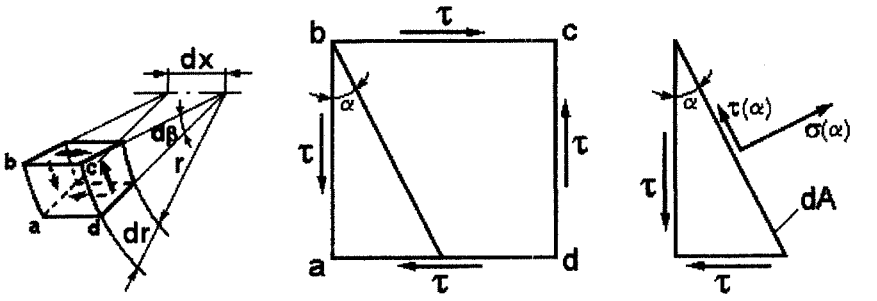


Fig. 5.8

Această stare de tensiuni a fost analizată în paragraful 4.6, unde s-a constatat că în secţiunile înclinate cu unghiul $\alpha = \pi/4$ faţă de secţiunile transversale, tensiunile tangenţiale sunt nule iar tensiunile normale sunt maxime şi egale cu cele tangenţiale din secţiunile transversale respective (fig. 5.9a).

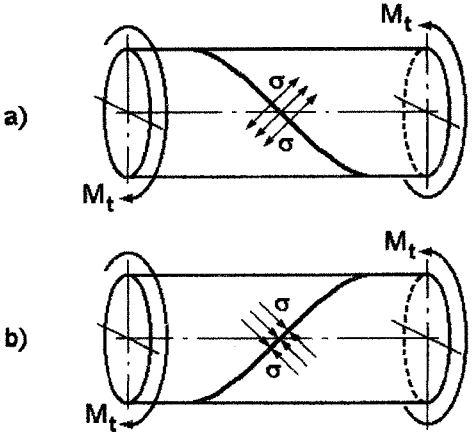


Fig. 5.9

În secţiunile înclinate cu unghiul $\alpha = 3\pi/4$ faţă de secţiunile transversale, tensiunile tangenţiale sunt de asemenea nule iar tensiunile normale sunt minime (de compresiune) şi egale în valoare absolută cu tensiunile tangenţiale din secţiunile transversale respective (fig. 5.9b).

5.6. Aplicaţii

Aplicaţia 5.1. Să se dimensioneze un arbore de secţiune circulară, cu lungimea l = 0,8m, care transmite o putere P = 10 kW, la o turaţie n = 750 rot/min, dacă τ_a = 100 MPa.
Dimensionarea se va efectua în două variante constructive:
1) - secţiune circulară plină;
2) - secţiune circulară inelară cu raportul diametrelor $d_i / d_e = 0,8$.
Să se calculeze şi deformaţiile unghiulare totale în cele două situaţii, dacă $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

Rezolvare
Atunci când se cunoaşte puterea transmisă P [W], la o anumită turaţie n [rot/min], se poate scrie:

$$P = F \cdot v = F \cdot \omega R = FR\frac{2\pi n}{60} = FR\frac{\pi n}{30}, \qquad (5.28)$$

unde F este forţa [N];
v - viteza [m/s];
ω - viteza unghiulară [rad/s];
R - raza la care se transmite forţa, [m].
Momentul de torsiune transmis de arbore este $M_t = F \cdot R$ şi din relaţia (5.28) rezultă:

$$\boxed{M_t = \frac{30}{\pi}\frac{P}{n} = 9,55\frac{P}{n}} \quad [N \cdot m]\,. \qquad (5.29)$$

Dacă puterea este măsurată în kW relaţia (5.29) devine

$$M_t = 9550\frac{P}{n} \qquad [N \cdot m]\,, \qquad (5.30)$$

iar dacă puterea este exprimată în CP, se obţine

$$M_t = 7162\frac{P}{n} \qquad [N \cdot m]\,. \qquad (5.31)$$

Condiția de rezistență conduce la:

$$W_{pnec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{9550P}{n\tau_a}.$$

1) Pentru prima variantă constructivă rezultă:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{9550P}{n\tau_a} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9550 \cdot 10000}{\pi \cdot 750 \cdot 100}} = 18{,}6 \approx 19 \text{ mm}.$$

Pentru această dimensiune, rotirea relativă a capetelor arborelui este

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_p} = \frac{9550Pl32}{nG\pi d^4} = \frac{9550 \cdot 10000 \cdot 800 \cdot 32}{750 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 19^4} = 0{,}099 \text{ rad} = 5{,}7°.$$

2) Pentru secțiunea circulară inelară rezultă:

$$W_p = \frac{\pi[d_e^4 - (0{,}8d_e)^4]}{16d_e} = \frac{9550P}{n\tau_a} \Rightarrow$$

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9550 \cdot 10000}{\pi \cdot 750 \cdot 100 \cdot (1 - 0{,}8^4)}} = 22{,}2 \approx 23 \text{ mm}$$

$d_i = 0{,}8 \cdot d_e = 0{,}8 \cdot 23 = 18{,}4 \approx 18$ mm.

Rotirea relativă a capetelor arborelui este:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_p} = \frac{9550Pl32}{nG\pi(d_e^4 - d_i^4)} = \frac{9550 \cdot 10000 \cdot 800 \cdot 32}{750 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot (23^4 - 18^4)} = 0{,}074 \text{ rad} = 4{,}2°$$

Ariile secțiunilor transversale ale arborilor dimensionați în cele două variante constructive sunt:

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = 283{,}5 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi(d_e^2 - d_i^2)}{4} = 161 \text{ mm}^2$$

Se observă că arborele cu secțiunea inelară este o soluție mai economică, realizându-se o reducere a consumului de material, față de secțiunea circulară plină, cu:

$$\frac{A_1 - A_2}{A_1} 100 = 43{,}2\ \%.$$

Aplicaţia 5.2. Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse

Să se dimensioneze şi să se calculeze săgeata unui arc cilindric elicoidal (fig. 5.10), solicitat în ansamblu la compresiune de forţa F = 1000 N, dacă se cunosc: raza de înfăşurare, R = 30 mm, numărul de spire n = 10, modulul de elasticitate transversală G = $8 \cdot 10^4$ MPa şi tensiunea tangenţială admisibilă τ_a = 500 MPa.

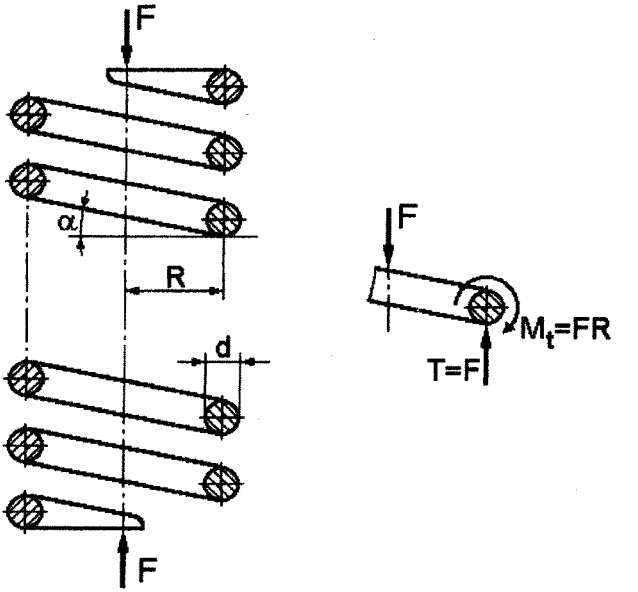


Fig. 5.10

Rezolvare

Forţa *F* care acţionează pe direcţia axei arcului, se reduce în centrul de greutate al secţiunii transversale a spirei, rezultând un torsor format din forţa *F* (paralelă cu axa arcului) şi momentul *M* = *F·R*, perpendicular pe planul determinat de forţele *F*. Proiectând aceşti vectori pe direcţia tangentei la axa barei şi pe planul secţiunii rezultă următoarele eforturi:

- momentul de torsiune, $M_t = F \cdot R \cos \alpha$; (5.32)
- momentul încovoietor, $M_i = F \cdot R \sin \alpha$; (5.33)
- forţa tăietoare, $T = F \cos\alpha$; (5.34)
- forţa axială, $N = F \sin\alpha$, (5.35)

unde α este unghiul de înclinare al elicei (spirei).

Deoarece unghiul α este mic ($\alpha = 6 \div 9°$), momentul încovoietor şi forţa axială se neglijează, iar momentul de torsiune şi forţa tăietoare sunt aproximativ egale cu:

$$M_t = F \cdot R; \tag{5.36}$$

$$T = F. \tag{5.37}$$

Tensiunile tangenţiale provenite din solicitarea de forfecare pot fi adeseori neglijate, deoarece sunt mult mai mici decât cele produse de momentul de torsiune.

Într-un calcul simplificat al arcului cilindric elicoidal cu spire strânse se consideră deci că sârma arcului este solicitată numai la torsiune.

Din condiţia de rezistenţă rezultă:

$$W_{p\,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{\pi d^3}{16} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16FR}{\pi\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000 \cdot 30}{\pi \cdot 500}} = 6{,}73 \approx 7\,\text{mm}$$

Pentru calculul săgeţii arcului, se scrie egalitatea dintre lucrul mecanic al forţei exterioare (care produce deformaţia) şi energia potenţială de deformaţie înmagazinată în spirele arcului:

$$L_{ext} = U\,. \tag{5.38}$$

Lucrul mecanic exterior, L_{ext}, se calculează cu relaţia

$$L_{ext} = \frac{F \cdot f}{2} \tag{5.39}$$

în care f este săgeata arcului.

Energia potenţială de deformaţie U, este

$$U = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_p}dx = \int_0^l \frac{F^2R^2}{2G\frac{\pi d^4}{32}}dx = \frac{16F^2R^2l}{G\pi d^4}.$$

Ţinând seama că lungimea desfăşurată a arcului este $l = 2\pi Rn$, se obţine:

$$U = \frac{32F^2R^3n}{Gd^4}. \tag{5.40}$$

Egalând relaţia (5.39) cu (5.40), se obţine expresia săgeţii arcului:

$$f = \frac{64FR^3n}{Gd^4}. \qquad (5.41)$$

Pentru datele din problemă, săgeata arcului este:

$$f = \frac{64 \cdot 1000 \cdot 30^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^4 \cdot 7^4} = 89{,}9 \text{ mm}.$$

Aplicaţia 5.3. Să se dimensioneze bara din figura 5.11, în două variante constructive:

1) - bara cu secţiune circulară plină, constantă pe toată lungimea;

2) - bara cu secţiune circulară plină, constantă pe regiuni.

Se cunosc: $M_t = 6$ kN·m; $\tau_a = 100$ MPa. În cele două variante constructive să se calculeze rotirea capătului liber, pentru $l = 0{,}25$m; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

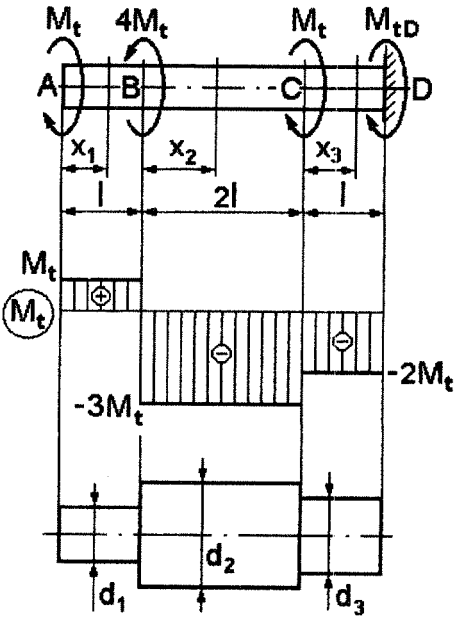


Fig. 5.11

Rezolvare

Momentele de torsiune în cele trei regiuni ale barei sunt:

- regiunea AB; $x_1 \in (0,l)$; $M_t(x_1) = M_t$;
- regiunea BC; $x_2 \in (0,2l)$; $M_t(x_2) = M_t - 4M_t = -3M_t$;
- regiunea CD; $x_3 \in (0,l)$; $M_t(x_3) = M_t - 4M_t + M_t = -2M_t$.

Varianta 1. Condiția de rezistență este:

$$\tau_a = \tau_{max} = \frac{|M_{t\,max}|}{W_{p\,nec}} = \frac{|-3M_t|}{W_{p\,nec}};$$

$$\begin{cases} W_{p\,nec} = \dfrac{3M_t}{\tau_a} \\ W_{p\,nec} = \dfrac{\pi d^3}{16} \end{cases} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{48M_t}{\pi\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{48\cdot 6\cdot 10^6}{\pi\cdot 100}} = 97{,}1 \approx 98\,\text{mm}.$$

Rotirea capătului liber al barei este:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{AB} + \Delta\varphi_{BC} + \Delta\varphi_{CD} = \frac{M_t\cdot l}{GI_p} + \frac{(-3M_t)\cdot 2l}{GI_p} + \frac{(-2M_t)\cdot l}{GI_p} =$$

$$= -\frac{7M_t\cdot l}{GI_p} = -\frac{7\cdot 6\cdot 10^6\cdot 250\cdot 32}{8\cdot 10^4\cdot\pi\cdot 98^4} = -0{,}01449\,\text{rad} = -0{,}83^\circ$$

Semnul minus indică rotirea capătului barei în sens contrar momentelor pozitive.

Varianta 2. Din condiția de rezistență pe fiecare regiune rezultă:

$$W_{p1nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{\pi d_1^3}{16} \Rightarrow$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 6\cdot 10^6}{\pi\cdot 100}} = 67{,}3 \approx 68\,\text{mm};$$

$$d_2 = 98\,\text{mm};$$

$$W_{p3\,nec} = \frac{|-2M_t|}{\tau_a} = \frac{\pi d_3^3}{16} \Rightarrow$$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{32M_t}{\pi\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 6\cdot 10^6}{\pi\cdot 100}} = 84{,}8 \approx 85\,\text{mm}.$$

Rotirea capătului liber în cea de-a doua variantă constructivă este:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{AB} + \Delta\varphi_{BC} + \Delta\varphi_{CD} = \frac{M_t\cdot l}{GI_{p1}} + \frac{(-3M_t)\cdot 2l}{GI_{p2}} + \frac{(-2M_t)\cdot l}{GI_{p3}} =$$

$$= -0{,}0108\,\text{rad} = -0{,}62^\circ$$

Aplicaţia 5.4. Să se dimensioneze bara din figura 5.12 ştiind că $M_t = 10$ kN·m şi $\tau_a = 80$ MPa.

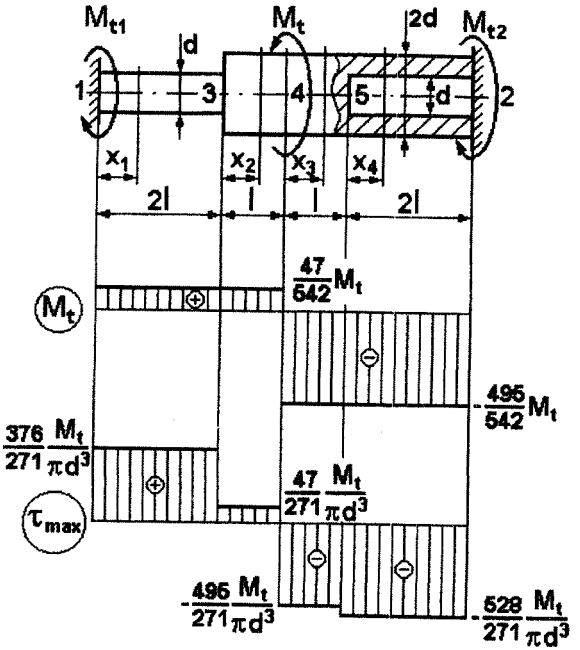


Fig. 5.12

Rezolvare

Ecuaţia de echilibru este:

$$M_{t1} - M_t + M_{t2} = 0 \,. \tag{5.42}$$

Problema este simplu static nedeterminată iar ecuaţia suplimentară se scrie din condiţia ca deformaţia totală (rotirea), să fie nulă:

$$\Delta\varphi_{tot} = 0. \tag{5.43}$$

Pentru calculul deformaţiilor fiecărei regiuni se utilizează relaţia (5.20) în care:

- pentru $x_1 \in (0, 2l)$; $M_t(x_1) = M_{t1}$;

$$I_p(x_1) = \frac{\pi d^4}{32};$$

- pentru $x_2 \in (0, l)$; $M_t(x_2) = M_{t1}$;

$$I_p(x_2) = \frac{\pi(2d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2};$$

- pentru $x_3 \in (0, l)$; $M_t(x_3) = M_{t1} - M_t$;

$$I_p(x_3) = I_p(x_2) = \frac{\pi d^4}{2};$$

- pentru $x_4 \in (0, 2l)$; $M_t(x_4) = M_{t1} - M_t$;

$$I_p(x_4) = \frac{\pi[(2d)^4 - d^4]}{32} = \frac{15\pi d^4}{32}.$$

Condiţia exprimată de ecuaţia (5.43) devine:

$$\frac{M_{t1} \cdot 2l}{G\frac{\pi d^4}{32}} + \frac{M_{t1} \cdot l}{G\frac{\pi d^4}{2}} + \frac{(M_{t1} - M_t) \cdot l}{G\frac{\pi d^4}{2}} + \frac{(M_{t1} - M_t) \cdot 2l}{G\frac{15\pi d^4}{32}} = 0. \quad (5.44)$$

Din ecuaţiile (5.42) şi (5.44) rezultă reacţiunile:

$$M_{t1} = \frac{47}{542} M_t; \qquad M_{t2} = \frac{495}{542} M_t.$$

Înlocuind reacţiunea M_{t1} în expresiile momentelor de torsiune se obţine:

$$M_t(x_1) = M_t(x_2) = \frac{47}{542} M_t$$

$$M_t(x_3) = M_t(x_4) = -\frac{495}{542} M_t$$

Diagrama de momente de torsiune este reprezentată în fig. 5.12.

În calculul de dimensionare, pentru a păstra rapoartele care există între diametrele barei, este necesară trasarea diagramei de variaţie a tensiunilor tangenţiale maxime în lungul barei.

Pe baza relaţiei (5.12), pentru fiecare regiune se scrie:

$$\tau_{max}(x_1) = \frac{\frac{47}{542} M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{376}{271} \cdot \frac{M_t}{\pi d^3};$$

$$\tau_{max}(x_2) = \frac{\frac{47}{542} M_t}{\frac{\pi d^3}{2}} = \frac{47}{271} \cdot \frac{M_t}{\pi d^3};$$

$$\tau_{max}(x_3) = -\frac{\frac{495}{542}M_t}{\frac{\pi d^3}{2}} = -\frac{495}{271}\cdot\frac{M_t}{\pi d^3};$$

$$\tau_{max}(x_4) = -\frac{\frac{47}{542}M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = -\frac{528}{271}\cdot\frac{M_t}{\pi d^3}.$$

Diagrama de variaţie a tensiunilor tangenţiale maxime în lungul barei este prezentată în figura 5.12.

Condiţia de rezistenţă

$$\tau_{max} = \max(|\tau_{max}(x)|) = \tau_a$$

conduce la:

$$\frac{528}{271}\cdot\frac{M_t}{\pi d^3} = \tau_a \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{528M_t}{271\pi\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{528\cdot 10\cdot 10^6}{271\cdot\pi\cdot 80}} = 42{,}6 \approx 43 \text{ mm}.$$

6. SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE A BARELOR DREPTE

O bară dreaptă este supusă la ***încovoiere pură*** *dacă asupra ei acţionează cupluri de forţe (momente) ale căror vectori sunt dirijaţi în lungul uneia din axele principale centrale ale secţiunii transversale.*

Cazul cel mai simplu de solicitare la încovoiere pură, este prezentat în figura 6.1.

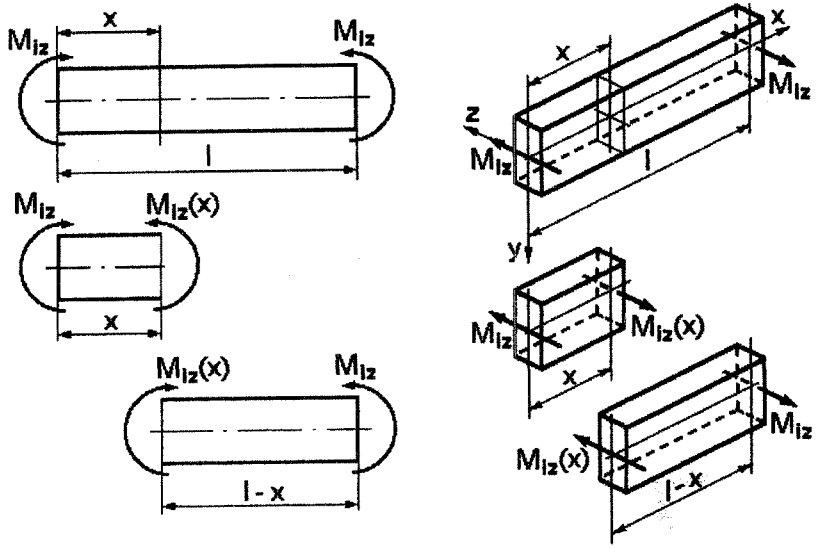


Fig. 6.1

Solicitarea de încovoiere pură se caracterizează prin:
- apariţia în secţiunile transversale, numai a momentelor încovoietoare M_{iz}, în cazul încovoierii pure după axa Oz, sau numai a momentelor încovoietoare M_{iy}, în cazul încovoierii pure după axa Oy;
- curbarea axei barei şi rotirea fiecărei secţiuni transversale în jurul axei după care este orientat momentul încovoietor din secţiune.

În general însă, în secţiunile transversale ale unei bare apar atât momente încovoietoare cât şi forţe tăietoare. În acest caz solicitarea se numeşte ***încovoiere simplă***.

Dacă planul în care forţele acţionează perpendicular pe axa barei este xOy, în secţiune apar eforturile M_{iz} şi T_y iar dacă planul forţelor este xOz, în secţiune apar eforturile M_{iy} şi T_z.

Barele drepte solicitate la încovoiere se numesc *grinzi.*

Dacă pe o grindă acţionează mai multe forţe şi momente, eforturile variază şi, în acest caz, este necesară trasarea diagramelor de momente încovoietoare şi forţe tăietoare (§2.1.4).

6.1. Calculul tensiunilor normale la solicitarea de încovoiere pură

Pentru a stabili natura tensiunilor (σ sau τ) care apar în secţiunile transversale ale unei bare drepte solicitată la încovoiere pură, se consideră următorul experiment.

Pe o bară dreaptă, de secţiune dreptunghiulară, se trasează o serie de linii echidistante şi paralele cu axa barei şi altele perpendiculare pe acestea (de asemenea echidistante), astfel încât pe suprafaţa barei se realizează o reţea de dreptunghiuri (fig. 6.2a).

Solicitând la încovoiere pură acestă bară, de exemplu după axa principală centrală Oz, ea se deformează ca în figura 6.2b.

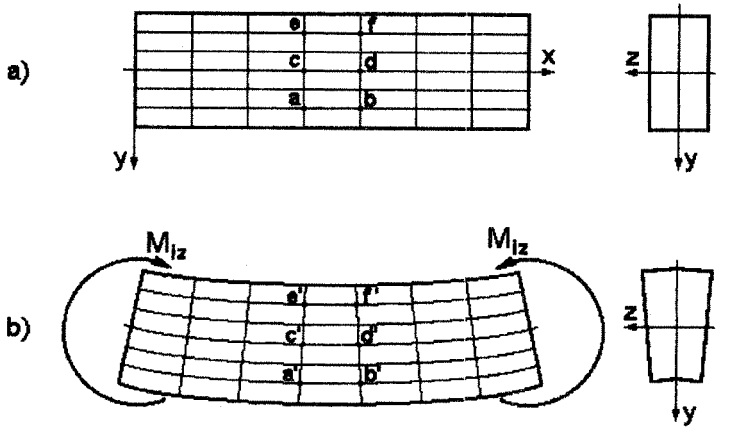


Fig. 6.2

Analizând reţeaua de linii de pe bara deformată, se fac următoarele constatări:

- liniile transversale ale reţelei sunt tot drepte şi perpendiculare pe tangenta la axa deformată a barei (se constată deci că se verifică ipoteza lui Bernoulli, în punctele de pe suprafaţa exterioară);
  reţeaua deformată este formată tot din dreptunghiuri, deci nu se produc modificări ale unghiurilor drepte;

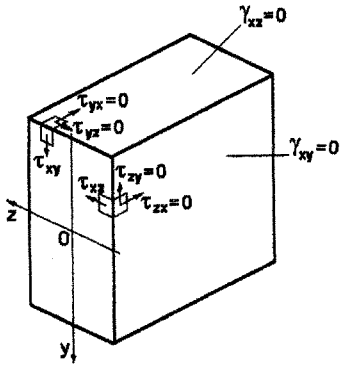


Fig. 6.3

rezultă că lunecările specifice de pe suprafeţele exterioare sunt nule, $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ (fig.6.3) şi în consecinţă, conform legii lui Hooke, $\tau = G \cdot \gamma$, tensiunile tangenţiale sunt nule, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$, $\tau_{yx} = 0$, $\tau_{yz} = 0$;
în baza principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale rezultă că $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$ şi $\tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$;

- se produc modificări neuniforme ale lungimii dreptunghiurilor: unele cresc, a'b' > ab, unele rămân neschimbate, c'd' = cd iar altele se micşorează e'f' < ef; rezultă deci că deformaţiile liniare specifice sunt diferite de zero, $\varepsilon_x \neq 0$ şi în consecinţă, conform legii lui Hooke, $\sigma = E \cdot \varepsilon$, tensiunile normale sunt diferite de zero, $\sigma_x \neq 0$;
- pe suprafaţa exterioară superioară şi respectiv inferioară, liniile transversale rămân paralele şi echidistante, producându-se o modificare uniformă a lungimii dreptunghiurilor (scurtare pe suprafaţa superioară, alungire pe suprafaţa inferioară); rezultă că deformaţiile liniare specifice ε_x şi tensiunile normale σ_x sunt uniforme atât pe lăţimea barei cât şi în lungul acesteia;

Admiţând că fenomenul se produce la fel şi în interiorul barei, se poate trage concluzia că la solicitarea de încovoiere pură apar numai tensiuni normale neuniform distribuite pe înălţimea secţiunii transversale, dar constante pe lăţimea acesteia.

Datorită efectului de contracţie transversală, în secţiune latura superioară se alungeşte iar cea inferioară se scurtează, ambele curbându-se ca în figura 6.2b.

Suprafaţa longitudinală a barei în care deformaţiile liniare specifice sunt nule se numeşte *suprafaţă neutră*. Intersecţia dintre suprafaţa neutră şi planul *xOy* este *axa neutră a grinzii*.

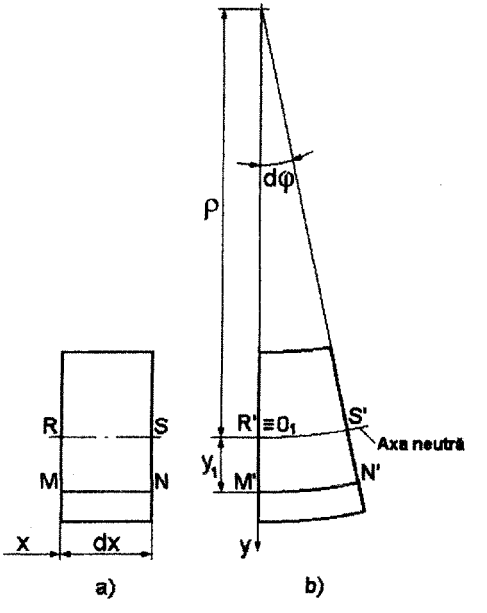


Fig. 6.4

Pentru a stabili modul de distribuţie a tensiunilor normale pe înălţimea secţiunii transversale, se izolează un element de lungime *dx*, prin secţionarea barei cu două plane perpendiculare pe axa acesteia (fig. 6.4a).

După solicitarea barei, elementul considerat se deformează ca în figura 6.4b.

Considerând convenţional secţiunea *x* fixă, secţiunea aflată la distanţa $x + dx$ se roteşte cu unghiul $d\varphi$.

O fibră oarecare situată la distanţa y_1 faţă de axa neutră, de lungime iniţială *dx*, are după deformare lungimea $M'N' = (\rho + y_1) \cdot d\varphi$ unde ρ este raza de curbură a axei neutre. În acelaşi timp fibra *RS* de lungime iniţială *dx*, aflată pe axa neutră, nu-şi modifică lungimea şi deci $dx = \rho \cdot d\varphi$.

Rezultă că pentru fibrele aflate la distanţa y_1 faţă de axa neutră, deformaţia liniară specifică este:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y_1)d\varphi - dx}{dx} = \frac{(\rho + y_1)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y_1}{\rho}. \qquad (6.1)$$

Adoptând ipoteza că atât pentru întindere cât şi pentru compresiune modulul de elasticitate longitudinală al materialului din care este confecţionată grinda este acelaşi, pe baza legii lui Hooke se scrie:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E\frac{y_1}{\rho}. \tag{6.2}$$

Relaţia (6.2) exprimă faptul că la solicitarea de încovoiere tensiunile normale din secţiunea transversală variază liniar pe înălţimea acesteia.

Având în vedere concluziile experimentului şi consideraţiile de mai sus, se face o analiză a celor şase ecuaţii de echivalenţă, ţinând seama şi de faptul că într-o secţiune transversală apare numai momentul încovoietor M_{iz} :

$$\begin{cases} N = \iint\limits_A \sigma_x \cdot dA \\ T_y = \iint\limits_A \tau_{xy} \cdot dA \\ T_z = \iint\limits_A \tau_{xz} \cdot dA \\ M_t = \iint\limits_A (z \cdot \tau_{xy} - y \cdot \tau_{xz}) \cdot dA \\ M_{iy} = -\iint\limits_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \\ M_{iz} = \iint\limits_A y \cdot \sigma_x \cdot dA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \iint\limits_A \sigma_x \cdot dA \\ 0 \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \\ 0 = -\iint\limits_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \\ M_{iz} = \iint\limits_A y \cdot \sigma_x \cdot dA \end{cases} \tag{6.3}$$

Se constată că din cele şase ecuaţii de echivalenţă, trei sunt identităţi $0 \equiv 0$, iar în continuare se analizează cele trei ecuaţii rămase.

Înlocuind în prima ecuaţie tensiunea normală σ_x cu expresia (6.2), se obţine:

$$0 = \frac{E}{\rho} \iint\limits_A y_1 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot S_{z1} \tag{6.4}$$

unde S_{z1} este momentul static de inerţie al secţiunii transversale faţă de axa O_1z_1.

Pentru ca ecuaţia (6.4) să devină şi ea o identitate $0 \equiv 0$, trebuie ca axa O_1z_1 să coincidă cu axa centrală Oz; rezultă că axa neutră a grinzii coincide cu axa geometrică a acesteia şi deci $y_1 \equiv y$.

Fiind îndeplinită această condiţie, relaţia (6.2) devine:

$$\sigma_x = E\frac{y}{\rho}. \tag{6.5}$$

Înlocuind în cea de-a doua ecuaţie relaţia (6.5), se obţine:

$$0 = -\frac{E}{\rho}\iint_A zy \cdot dA = -\frac{E}{\rho}\cdot I_{yz} \tag{6.6}$$

unde I_{yz} este momentul de inerţie centrifugal al secţiunii transversale faţă de sistemul de axe zOy.

Deoarece sistemul de axe în care sunt definite eforturile este un sistem principal central, momentul de inerţie centrifugal este nul, astfel încât şi această ecuaţie devine o identitate $0 \equiv 0$.

Ţinând seama de relaţia (6.5), ultima ecuaţie a sistemului (6.3) devine:

$$M_{iz} = \frac{E}{\rho}\iint_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho}\cdot I_z \tag{6.7}$$

unde I_z este momentul de inerţie al secţiunii transversale faţă de axa z.

Pe baza relaţiilor (6.5) şi (6.7), pentru tensiunea normală din secţiunea transversală x şi fibrele de ordonată y, rezultă:

$$\boxed{\sigma(x,y) = \frac{M_{iz}(x)}{I_z(x)}\cdot y} \tag{6.8}$$

Expresia (6.8) este numită ***formula lui Navier***.

Locul geometric al punctelor secţiunii transversale în care tensiunea normală este nulă se numeşte *axa neutră a secţiunii transversale*.

Într-o secţiune oarecare a grinzii, tensiunea normală este maximă în fibrele cele mai depărtate de axa neutră (fig. 6.5), unde $y = y_{max}$.

Din formula lui Navier rezultă:

$$\sigma_{max}(x) = \frac{M_{iz}(x)}{\underline{I_z(x)}} = \frac{M_{iz}(x)}{W_z(x)} \qquad (6.9)$$
$$y_{max}$$

în care

$$W_z(x) = \frac{I_z(x)}{y_{max}} \qquad (6.10)$$

este ***modulul de rezistență la încovoiere*** după axa *z*.

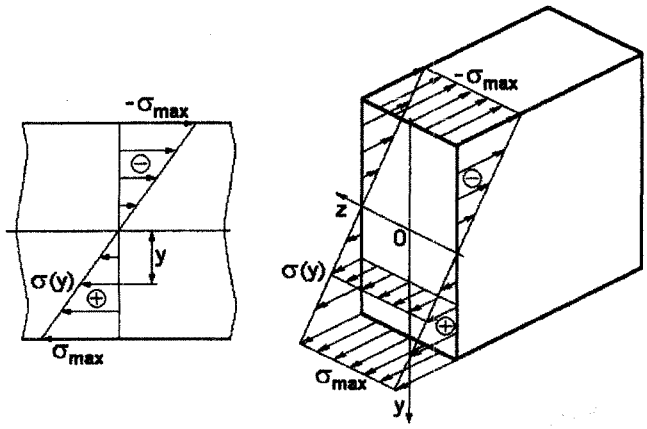


Fig. 6.5

Relația (6.9) permite efectuarea calculelor de dimensionare și de verificare din condiția de rezistență. În cazul grinzilor de secțiune constantă confecționate din materiale care rezistă la fel de bine atât la întindere cât și la compresiune, aceste relații sunt:

- pentru *dimensionare*,

$$W_{z\,nec} = \frac{|M_{iz\,max}|}{\sigma_a}; \qquad (6.11)$$

- pentru *verificare*,

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{iz\,max}|}{W_z} \leq \sigma_a. \qquad (6.12)$$

Pentru grinzile confecţionate din materiale care rezistă la întindere în mod diferit faţă de compresiune, se impun două condiţii de rezistenţă, corespunzătoare celor două zone ale secţiunii transversale (întinsă şi respectiv comprimată). Tensiunile normale maxime ale fiecărei zone se calculează cu relaţia (6.9), în care y_{max} reprezintă ordonata celor mai depărtate fibre din zona respectivă, faţă de axa neutră.

6.2. Calculul tensiunilor la solicitarea de încovoiere simplă a barelor drepte

La barele drepte solicitate la încovoiere simplă, într-o secţiune transversală există nu numai moment încovoietor, ci şi forţă tăietoare. Datorită acestui fapt, în secţiunile transversale ale grinzii apar atât tensiuni normale cât şi tensiuni tangenţiale. Apariţia tensiunilor tangenţiale însoţite de lunecările specifice corespunzătoare, face ca o secţiune plană şi perpendiculară pe axa barei înainte de deformare să nu rămână plană şi după deformare (fig. 6.6).

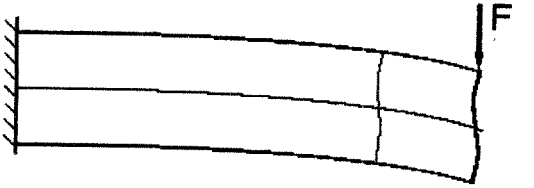


Fig. 6.6

Formula lui Navier, demonstrată pentru încovoierea pură, se poate aplica şi pentru încovoierea simplă, deoarece influenţa deplanării secţiunii datorată forţei tăietoare este neînsemnată. Pentru cazul în care forţa tăietoare este constantă în lungul grinzii, aplicarea formulei lui Navier este destul de exactă. Dacă forţa tăietoare variază în lungul grinzii, aplicarea acestei formule duce la o anumită eroare în calculul tensiunii normale. Valoarea acestei erori este proporţională cu mărimea raportului dintre înălţimea secţiunii h şi lungimea barei l. Deoarece conform definiţiei grinzii, acest raport este mic, erorile sunt neglijabile şi formula lui Navier poate fi utilizată.

Ţinând cont de aceste consideraţii, se face în continuare o analiză a ecuaţiilor de echivalenţă în cazul solicitării de încovoiere simplă a unei bare drepte:

$$\begin{cases} N = \iint_A \sigma_x \cdot dA \\ T_y = \iint_A \tau_{xy} \cdot dA \\ T_z = \iint_A \tau_{xz} \cdot dA \\ M_t = \iint_A (z \cdot \tau_{xy} - y \cdot \tau_{xz}) \cdot dA \\ M_{iy} = -\iint_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \\ M_{iz} = \iint_A y \cdot \sigma_x \cdot dA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \iint_A \sigma_x \cdot dA \\ T_y = \iint_A \tau_{xy} \cdot dA \\ 0 = \iint_A \tau_{xz} \cdot dA \\ 0 = \iint_A (z \cdot \tau_{xy} - y \cdot \tau_{xz}) \cdot dA \\ 0 = -\iint_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \\ M_{iz} = \iint_A y \cdot \sigma_x \cdot dA \end{cases} \quad (6.13)$$

Prima şi ultimele două ecuaţii din sistemul (6.13) au fost analizate în cazul încovoierii pure şi dacă influenţa deplanării secţiunilor transversale este neînsemnată, atunci concluziile analizei rămân valabile şi pentru încovoierea simplă, tensiunile normale calculându-se cu formula lui Navier.

Din a doua ecuaţie a sistemului (6.13) rezultă că tensiunile tangenţiale τ_{xy} sunt diferite de zero, rezultanta forţelor date de aceste tensiuni fiind forţa tăietoare T_y. Se face observaţia că tensiunile tangenţiale variază neuniform pe înălţimea secţiunii, fiind egale cu zero în punctele de pe contur cele mai depărtate de axa *Gz* (fig. 6.3.). Pentru a calcula integrala din această ecuaţie, trebuie cunoscută legea de variaţie pe secţiune a tensiunilor tangenţiale τ_{xy}. Ecuaţia se va verifica după ce se va stabili această lege.

A treia ecuaţie a sistemului (6.13) indică faptul că rezultanta forţelor interioare date de tensiunile tangenţiale τ_{xz} trebuie să fie nulă. Această condiţie este îndeplinită, dacă secţiunea transversală este simetrică faţă de axa *Gy* (fig. 6.7).

De asemenea, cea de-a patra ecuaţie devine o identitate $0 \equiv 0$, în condiţiile secţiunii transversale simetrice faţă de axa *Gy*.

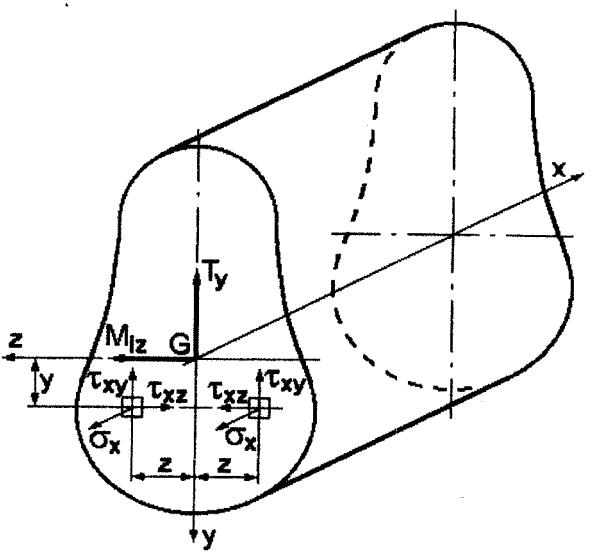


Fig. 6.7

În cele ce urmează se stabileşte legea de variaţie a tensiunilor tangenţiale τ_{xy} pe secţiunea transversală a grinzii.

Se consideră o grindă dreaptă solicitată la încovoiere simplă din care se izolează un element de volum delimitat de două secţiuni transversale situate la distanţa *dx* una de alta, şi de un plan longitudinal paralel cu planul *xGz*, situat la distanţa *y* de acesta (fig. 6.8).

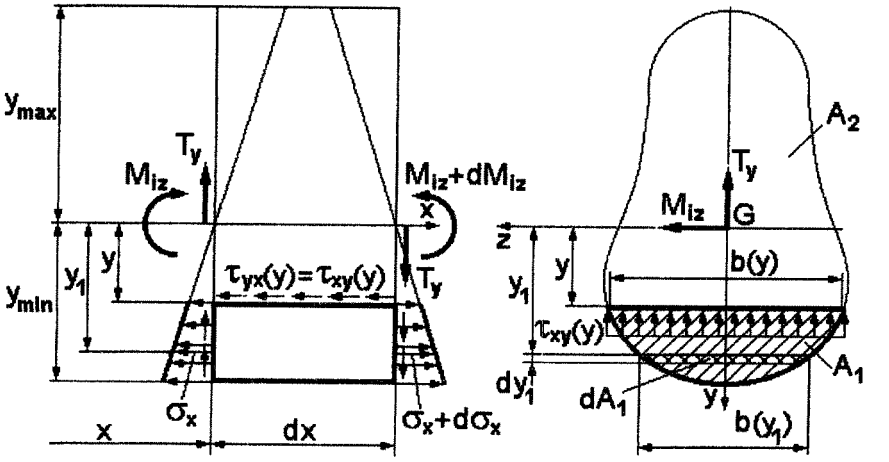


Fig. 6.8

Se fac *ipotezele*:

- secţiunea transversală este constantă pe lungimea *dx*;
- forţa tăietoare este constantă pe lungimea *dx*;
- tensiunea tangenţială τ_{xy} este constantă în toate punctele secţiunii situate la aceeaşi distanţă *y* faţa de axa *Gz* , *ipoteza lui Juravski*.

Pe cele două secţiuni transversale acţionează eforturile T_y şi M_{iz}, respectiv T_y şi $M_{iz} + dM_{iz}$. Corespunzător acestor eforturi, pe suprafeţele elementului izolat ce fac parte din secţiunile transversale, acţionează tensiunile τ_{xy} şi σ_x, respectiv τ_{xy} şi $\sigma_x + d\sigma_x$. Pe suprafaţa elementului din planul longitudinal cu care s-a făcut secţiunea apar, conform principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale, tensiunile $\tau_{yx}(y) = \tau_{xy}(y)$. Acestea sunt constante în planul longitudinal deoarece forţa tăietoare T_y este constantă pe lungimea *dx*, iar pe lăţimea *b(y)* sunt constante conform ipotezei lui Juravski.

Echilibrul elementului izolat se scrie sub forma unei ecuaţii de proiecţii de forţe pe direcţia axei grinzii:

$$\iint_{A_1}\sigma_x(y_1)\cdot dA_1+\tau_{xy}(y)\cdot b(y)\cdot dx-\iint_{A_1}[\sigma_x(y_1)+d\sigma_x(y_1)]\cdot dA_1=0 \quad (6.14)$$

unde A_1 este aria porţiunii din secţiunea transversală situată sub planul longitudinal cu care s-a izolat elementul considerat;

y_1 - ordonata unei fibre oarecare de pe suprafaţa A_1.

După reducerea termenilor asemenea, ecuaţia (6.14) devine:

$$\tau_{xy}(y)\cdot b(y)\cdot dx=\iint_{A_1}d\sigma_x(y_1)\cdot dA_1\Rightarrow\tau_{xy}(y)=\frac{1}{b(y)}\iint_{A_1}\frac{d\sigma_x(y_1)}{dx}dA_1. \quad (6.15)$$

Pe baza formulei lui Navier (6.8) şi ţinând seama de relaţia diferenţială dintre funcţiile momentului încovoietor şi forţei tăietoare (2.19), se poate scrie:

$$\frac{d\sigma_x(y_1)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{M_{iz}(x)\cdot y_1}{I_z}\right)=\frac{y_1}{I_z}\cdot\frac{dM_{iz}(x)}{dx}=\frac{y_1}{I_z}\cdot T_y(x). \quad (6.16)$$

Înlocuind expresia (6.16) în relaţia (6.15) se obţine:

$$\tau_{xy}(y)=\frac{1}{b(y)}\iint_{A_1}\frac{T_y(x)}{I_z}\cdot y_1 dA_1=\frac{T_y(x)}{b(y)\cdot I_z}\iint_{A_1} y_1 dA_1=\frac{T_y(x)\cdot S_{1z}}{b(y)\cdot I_z} \qquad (6.17)$$

unde S_{1z} este momentul static de inertie al suprafeţei A_1 faţă de axa Gz a secţiunii transversale.

Similar, dacă din volumul elementar delimitat de cele două secţiuni transversale situate la distanţa dx una faţă de alta, se consideră echilibrul părţii de deasupra planului longitudinal, se obţine:

$$\tau_{xy}(y)=\frac{T_y(x)\cdot S_{2z}}{b(y)\cdot I_z} \qquad (6.18)$$

unde S_{2z} este momentul static de inerţie al suprafeţei A_2 faţă de axa Gz a secţiunii transversale.

Se obţine astfel, pentru calculul tensiunilor tangenţiale τ_{xy} corespunzătoare punctelor din secţiunea transversală situate la distanţa y de axa Gz, relaţia:

$$\boxed{\tau_{xy}(y)=\frac{T_y\cdot S_z(y)}{b(y)\cdot I_z}} \qquad (6.19)$$

numită ***formula lui Juravski***, în care

T_y este forţa tăietoare din secţiunea considerată;

S_z - momentul static de inerţie al suprafeţei secţiunii transversale situată deasupra sau dedesubtul fibrelor în care se calculează tensiunea, calculat faţă de axa Gz;

$b(y)$ - lăţimea secţiunii transversale la distanţa y faţă de axa Gz;

I_z - momentul de inerţie axial al întregii secţiuni transversale, calculat faţă de axa Gz.

Cunoscând legea de variaţie a tensiunilor tangenţiale din secţiunea transversală (6.19), se poate verifica şi cea de-a doua ecuaţie de echivalenţă din sistemul (6.13):

$$T_y = \iint_A \tau_{xy} \cdot dA = \iint_A \frac{T_y \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} dA = \frac{T_y}{I_z} \int_{-y_{max}}^{y_{min}} S_z(y) \cdot dy \qquad (6.20)$$

în care $dA = b(y) \cdot dy$ este elementul de arie al secţiunii transversale;
$-y_{max}$, y_{min} sunt coordonatele fibrelor din secţiune, cele mai depărtate de axa Gz.

Efectuând integrarea prin părţi în relaţia (6.20), se obţine:

$$T_y = \frac{T_y}{I_z} \left[S_z(y) \cdot y \Big|_{-y_{max}}^{y_{min}} - \int_{-y_{max}}^{y_{min}} y \cdot dS_z(y) \right]. \qquad (6.21)$$

Dar,

$$dS_z(y) = - y \cdot dA = -y \cdot b(y) \cdot dy \qquad (6.22)$$

unde semnul minus arată că la creşterea lui y, scade S_z.
Cu expresia (6.22), relaţia (6.21) se scrie:

$$T_y = \frac{T_y}{I_z} \left[S_z(y_{min}) \cdot y_{min} + S_z(-y_{max}) \cdot y_{max} + \int_{-y_{max}}^{y_{min}} y \cdot yb(y) dy \right]. \qquad (6.23)$$

Deoarece $S_z(y_{min})$ şi $S_z(-y_{max})$ reprezintă momentele statice de inerţie ale întregii secţiuni transversale faţă de axa centrală Gz, acestea sunt nule şi cum $b(y) \cdot dy = dA$, relaţia (6.23) devine:

$$T_y = \frac{T_y}{I_z} \cdot \iint_A y^2 dA = T_y ,$$

adică şi cea de-a doua ecuaţie de echivalenţă din sistemul (6.13) este verificată.

În cele ce urmează se dau câteva exemple de calcul care ilustrează legea de variaţie a tensiunilor tangenţiale τ_{xy} pe înălţimea secţiunii transversale, în care forţa tăietoare este T_y.

a) **Secţiune dreptunghiulară** (fig. 6.9)

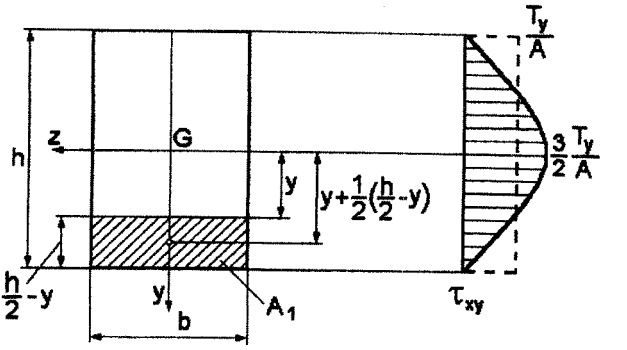


Fig. 6.9

Pentru această secţiune,

$b(y) = b, \forall y \in [-h/2, h/2]$.

Momentul static de inerţie al suprafeţei A_1 faţă de axa *Gz* este:

$$S_{1z}(y) = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Momentul de inerţie I_z, al întregii secţiuni transversale faţă de axa *Gz* este

$$I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Înlocuind mărimile de mai sus în formula lui Juravski (6.19), rezultă:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T_y S_{1z}}{b(y) I_z} = \frac{3}{2}\frac{T_y}{A}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \qquad (6.24)$$

unde $A = b \cdot h$ este aria secţiunii transversale.

Se observă că tensiunile tangenţiale τ_{xy} variază parabolic pe înălţimea secţiunii transversale, fiind nule în fibrele cele mai depărtate de axa *Gz* şi maxime pe axa *Gz* (fig. 6.9), unde $y = 0$.

Tensiunea tangenţială maximă este:

$$\tau_{xy\,max} = \frac{3}{2}\frac{T_y}{A}, \qquad (6.25)$$

valoare cu 50% mai mare decât cea calculată cu relaţia convenţională (4.2) stabilită la solicitarea de forfecare, unde tensiunile tangenţiale au fost considerate uniform distribuite pe înălţimea secţiunii transversale.

b) **Secţiune circulară** (fig. 6.10)

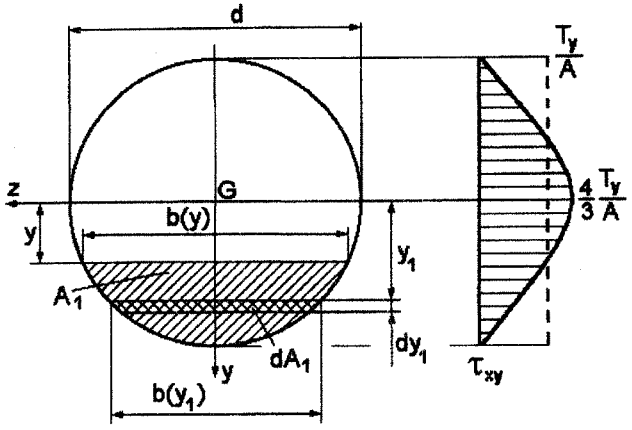


Fig. 6.10

Pentru fibrele situate la distanţa y de axa Gz, lăţimea secţiunii transversale este:

$$b(y) = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2}\ ,\ \forall y \in [-d/2,\ d/2].$$

Momentul static de inerţie al suprafeţei A_1 faţă de axa Gz se calculează astfel:

$$S_{1z}(y) = \iint_{A_1} y_1 dA_1 = \int_y^{d/2} y_1 \cdot b(y_1) dy_1 = \int_y^{d/2} 2y_1 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y_1^2}\ dy_1 \Rightarrow$$

$$S_{1z}(y) = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

Momentul de inerţie I_z al secţiunii circulare este:

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Înlocuind mărimile de mai sus în formula lui Juravski (6.19), rezultă:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T_y S_{1z}}{b(y) I_z} = \frac{4}{3}\frac{T_y}{A}\left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right) \qquad (6.26)$$

unde $A = \pi d^2/4$ este aria secţiunii transversale.

Se observă că tensiunile tangenţiale τ_{xy} variază parabolic pe înălţimea secţiunii transversale, fiind nule în fibrele cele mai depărtate de axa *Gz* şi maxime pe axa *Gz* (fig. 6.10), unde $y = 0$.

Tensiunea tangenţială maximă este

$$\tau_{xy\,max} = \frac{4}{3}\frac{T_y}{A}, \qquad (6.27)$$

valoare cu 33,3% mai mare decât cea calculată cu relaţia convenţională (4.2) stabilită la solicitarea de forfecare, unde tensiunile tangenţiale au fost considerate uniform distribuite pe înălţimea secţiunii transversale.

Lunecarea longitudinală

Aşa cum s-a arătat, în cazul solicitării de încovoiere simplă, în secţiunile transversale apar tensiuni tangenţiale τ_{xy}. Conform principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale, în planele longitudinale (paralele cu *xGz*) apar de asemenea tensiuni tangenţiale $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, orientate simetric faţă de muchia de intersecţie.

Forţa rezultantă a tuturor forţelor elementare date de tensiunile care lucrează într-un plan logitudinal se numeşte *forţă de lunecare*. Prezenţa acestei forţe conduce la apariţia fenomenului de *lunecare longitudinală*. Pentru a pune în evidenţă acest fenomen se consideră cazul a două grinzi confecţionate din acelaşi material şi având aceleaşi dimensiuni (fig. 6.11). Grinda din figura 6.11a, de secţiune $b \times h$, este executată dintr-o singură bucată iar cea din figura 6.11c este alcătuită din patru grinzi suprapuse (1) - (4), fiecare cu secţiunea $b \times h/4$.

După aplicarea forţei se constată că în cele două cazuri grinzile se deformează în mod diferit (fig. 6.11b-d). Se observă că în al doilea caz, cele patru grinzi componente se deformează identic şi între ele se manifestă fenomenul de lunecare longitudinală. Două puncte *A* şi *B*, iniţial vecine (fig. 6.11c) ocupă după deformare poziţii diferite, *A'* şi *B'* (fig. 6.11d). Acest lucru se explică prin aceea că fibrele din partea inferioară a grinzii (1) se scurtează iar fibrele din partea superioară a grinzii (2) se alungesc.

În primul caz, fenomenul de lunecare longitudinală nu se manifestă, datorită faptului că grinda este executată dintr-o singură bucată. Două puncte inițial vecine C și D (fig 6.11a) ocupă după deformare o nouă poziție C', D' (fig. 6.11b), dar rămân tot vecine.

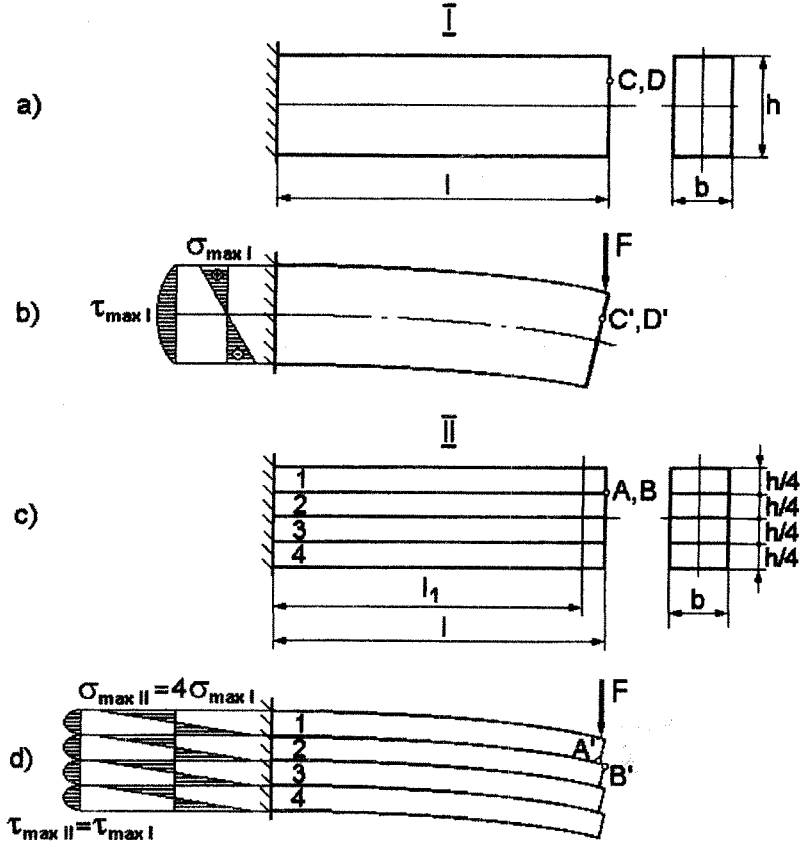


Fig. 6.11

În ambele cazuri eforturile sunt aceleași, cu valorile maxime în secțiunea din încastrare ($T_{y\,max} = F$; $M_{iz\,max} = -F \cdot l$).
Starea de tensiuni este însă diferită în cele două cazuri:
I - *grinda dintr-o bucată,*

$$\sigma_{max\,I} = \frac{|M_{iz\,max}|}{W_z} = \frac{6Fl}{bh^2}; \qquad (6.28)$$

$$\tau_{max\,I} = \frac{3F}{2bh}; \qquad (6.29)$$

II - *grinda compusă* din patru bucăţi

Pentru fiecare grindă componentă,

$$\sigma_{max\,II} = \frac{|M_{iz\,max1}|}{W_{z1}} = \frac{24Fl}{bh^2}; \qquad (6.30)$$

$$\tau_{max\,II} = \frac{3F}{2bh}. \qquad (6.31)$$

Se constată că tensiunea normală maximă în cazul II este de patru ori mai mare decât în primul caz, pe când tensiunile tangenţiale maxime au aceleaşi valori. Rezultă ca grinda compusă este o soluţie constructivă dezavantajoasă.

Dacă cele patru elemente sunt solidarizate, grinda compusă are aceeaşi comportare ca şi grinda executată dintr-o singură bucată. Pentru realizarea solidarizării se recurge la diferite soluţii constructive: sudură, şuruburi, pene etc. Elementele ce realizează îmbinarea preiau forţele de lunecare longitudinală din planele de separaţie ale componentelor, fiind solicitate la forfecare.

Pentru o lungime *dx* dintr-un plan longitudinal aflat la distanţa *y* faţă de planul *xGz*, forţa elementară de lunecare longitudinală *dL* este:

$$dL = \tau_{xy}(x,y)\cdot b(y)\cdot dx = \frac{T_y(x)\cdot S_z(y)}{b(y)\cdot I_z}\cdot b(y)\cdot dx = \frac{S_z(y)}{I_z}\cdot T_y(x)dx. \qquad (6.32)$$

Pentru o lungime de grindă cuprinsă între secţiunile transversale de abscise x_1 şi x_2, ***forţa de lunecare*** *L* rezultă prin integrarea relaţiei (6.32):

$$\boxed{L = \frac{S_z(y)}{I_z}\int_{x_1}^{x_2} T_y(x)dx} \qquad (6.33)$$

Ţinând seama că $T_y(x) = \frac{dM_{iz}(x)}{dx}$, relaţia (6.33) poate fi scrisă şi sub forma:

$$L = \frac{S_z(y)}{I_z}\left(M_{iz2} - M_{iz1}\right) \qquad (6.34)$$

în care M_{iz2} şi M_{iz1} sunt momentele încovoietoare din secţiunile x_2 şi x_1.

Dacă forţa tăietoare este constantă pe intervalul $[x_1, x_2]$, relaţia (6.33) devine:

$$L = \frac{S_z(y) \cdot T_y}{I_z} \cdot (x_2 - x_1) \qquad (6.35)$$

Folosind pentru solidarizarea componentelor grinzii din cazul II (fig. 6.11c) un şurub situat la distanţa l_1 de încastrare, diametrul d al acestuia rezultă din condiţia de rezistenţă la forfecare pusă în planul în care se preia forţa de lunecare maximă:

$$\tau_{max} = \frac{L}{A_s} = \frac{\frac{3}{2}\frac{F}{bh} \cdot l_1 \cdot b}{\frac{\pi d^2}{4}} = \tau_a \Rightarrow d = \sqrt{\frac{6Fl_1}{\pi h \tau_a}}.$$

Consideraţii privind calculul de rezistenţă al grinzilor drepte solicitate la încovoiere simplă

Din cele expuse rezultă că în punctele secţiunii transversale apar simultan atât tensiuni normale σ_x cât şi tensiuni tangenţiale τ_{xy}. Din diagramele de variaţie ale acestor tensiuni pe înălţimea secţiunii transversale se observă că în fibrele extreme unde tensiunea normală σ_x are valoare maximă, tensiunea tangenţială τ_{xy} este nulă, iar în punctele de pe axa neutră a secţiunii, tensiunea normală este nulă, în timp ce tensiunea tangenţială are valoarea maximă. În această situaţie, la calculele de rezistenţă trebuie să se aibă în vedere raportul dintre înălţimea secţiunii transversale h şi lungimea grinzii l. Din acest punct de vedere se disting următoarele situaţii:

a) *grinzi lungi*, la care $l >> h$, cazul cel mai frecvent întâlnit în practică; calculul de dimensionare sau verificare se face în această situaţie ţinând cont numai de momentul încovoietor, deoarece $\sigma_{x\,max} >> \tau_{xy\,max}$; în cazul grinzilor cu variaţie bruscă a lăţimii secţiunii pe înălţime (profil I, T etc.), tensiunile tangenţiale pot fi apropiate ca mărime de tensiunile normale, fiind necesar calculul unei *tensiuni echivalente* care să ţină seama de ambele solicitări, calcul specific solicitărilor compuse care va fi prezentat ulterior;

b) *grinzi scurte*, cu $l < 5h$, la care predomină solicitarea de forfecare; calculul de dimensionare sau verificare se face din condiţia de rezistenţă la forfecare, calculând tensiunea tangenţială maximă cu formula lui Juravski; pentru grinzi cu $l < 2h$ numite şi grinzi pereţi, calculul se face pe baza teoriei elasticităţii.

6.3. Tensiuni din secţiuni înclinate la solicitarea de încovoiere simplă a grinzilor drepte

Se consideră o grindă dreaptă solicitată la încovoiere simplă din care se izolează un element de volum care conţine o suprafaţă *dA*, înclinată cu unghiul α faţă de secţiunea transversală (fig. 6.12).

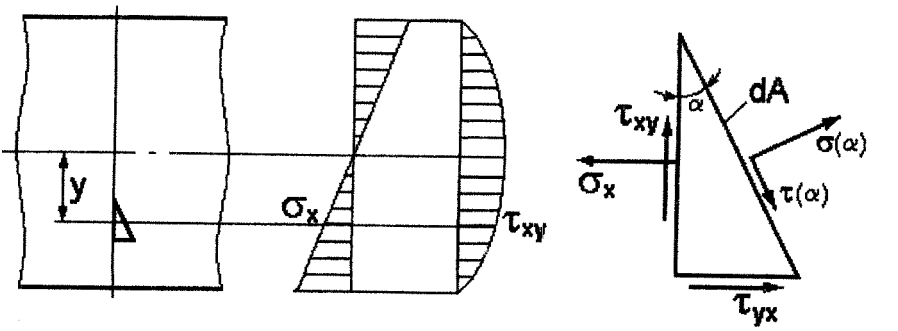


Fig. 6.12

Pe suprafaţa elementului de volum din secţiunea transversală acţionează tensiunea normală σ_x şi tensiunea tangenţială τ_{xy}. Pe suprafaţa longitudinală, conform principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale, acţionează tensiunea $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, iar pe suprafaţa înclinată, tensiunea normală $\sigma(\alpha)$ şi tensiunea tangenţială $\tau(\alpha)$.

Forţele corespunzătoare acestor tensiuni au rezultantele aplicate în centrele de greutate ale suprafeţelor pe care acţionează iar echilibrul lor se poate scrie pe baza schemei din figura 6.12c. Proiecţia forţelor pe direcţia tensiunii $\sigma(\alpha)$ este:

$$\sigma(\alpha)dA - \sigma_x dA\cos^2\alpha + 2\,\tau_{xy}dA\sin\alpha\cos\alpha = 0. \qquad (6.36)$$

Proiecţia forţelor pe direcţia tensiunii $\tau(\alpha)$ este:

$$\tau(\alpha)dA - \sigma_x dA\cos\alpha\sin\alpha - \tau_{xy}dA\cos^2\alpha + \tau_{xy}dA\sin^2\alpha = 0. \qquad (6.37)$$

Rezolvând sistemul format de ecuaţiile (6.36) şi (6.37) se obţine:

$$\begin{cases} \sigma(\alpha) = \dfrac{\sigma_x}{2}(1+\cos 2\alpha) - \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau(\alpha) = \dfrac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{cases} \qquad (6.38)$$

Pentru a stabili valorile extreme ale tensiunilor normale, numite *tensiuni principale*, şi direcţiile acestora, numite *direcţii principale*, se anulează derivata în raport cu variabila 2α a funcţiei $\sigma(\alpha)$:

$$\frac{d\sigma(\alpha)}{d(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha = -\tau(\alpha) = 0. \qquad (6.39)$$

Rezolvând ecuaţia (6.39) se obţine relaţia ce permite calculul direcţiilor principale:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}} \qquad (6.40)$$

Deoarece perioada funcţiei tangentă este π, se poate scrie:

$$2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2,$$

adică cele două direcţii principale sunt perpendiculare.

Comparând derivata tensiunii normale (6.39) cu expresia tensiunii tangenţiale $\tau(\alpha)$ din sistemul (6.38), se observă că *pe direcţiile principale tensiunile tangenţiale sunt nule*.

Înlocuind în relaţia tensiunii normale $\sigma(\alpha)$ valorile lui $\sin 2\alpha$ şi $\cos 2\alpha$ corespunzătoare direcţiilor principale,

$$\sin 2\alpha_{1,2} = \pm\frac{\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha_{1,2}}} = \mp\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\alpha_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha_{1,2}}} = \pm\frac{\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

se obţine expresia pentru calculul tensiunilor principale σ_1 şi σ_2:

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \qquad (6.41)$$

Se observă că cele două tensiuni principale au semne contrare, adică pe *direcţia principală 1* tensiunea este de *întindere* iar pe *direcţia principală 2* tensiunea este de *compresiune*.

Pentru a determina valorile extreme ale tensiunii tangenţiale se anulează derivata funcţiei $\tau(\alpha)$ din sistemul (6.38), în raport cu unghiul 2α:

$$\frac{d\tau(\alpha)}{d(2\alpha)} = \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha = 0. \qquad (6.42)$$

Rezolvând ecuaţia (6.42) se obţine:

$$\boxed{tg2\alpha_{3,4} = \frac{\sigma_x}{2\tau_{xy}}} \qquad (6.43)$$

unde $\alpha_{3,4}$ reprezintă unghiurile pentru care tensiunile tangenţiale au valori extreme.

Deoarece perioada funcţiei tangentă este π, se poate scrie:

$$2\alpha_4 = 2\alpha_3 + \pi \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_4 = \alpha_3 + \pi/2.$$

adică cele două secţiuni pe care tensiunile tangenţiale au valori extreme, sunt perpendiculare.

De asemenea se poate observa că

$$tg\ 2\alpha_{1,2} \cdot tg\ 2\alpha_{3,4} = -1,$$

adică

$$2\alpha_{3,4} = 2\alpha_{1,2} + \pi/2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{3,4} = \alpha_{1,2} + \pi/4.$$

Rezultă deci că între direcţiile principale şi direcţiile pentru care tensiunile tangenţiale sunt extreme, este un unghi de 45°.

Înlocuind în relaţia tensiunii tangenţiale $\tau(\alpha)$ valorile lui $\sin 2\alpha_{3,4}$ şi $\cos 2\alpha_{3,4}$ în funcţie de $tg\ 2\alpha_{3,4}$ se obţine expresia pentru calculul tensiunilor tangenţiale extreme:

$$\boxed{\tau_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \qquad (6.44)$$

Ţinând seama de relaţia (6.41) se observă că

$$\tau_{1,2} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad (6.45)$$

Universitatea Tehnică Iaşi
BIBLIOTECA

În punctele secţiunii transversale ale unei grinzi, tensiunile principale şi direcţiile lor variază în funcţie de poziţia punctelor pe înălţimea secţiunii. Se consideră, pentru exemplificare, o secţiune transversală *m - n* în care tensiunile normale σ_x şi τ_{xy} variază ca în figura 6.13a-b.

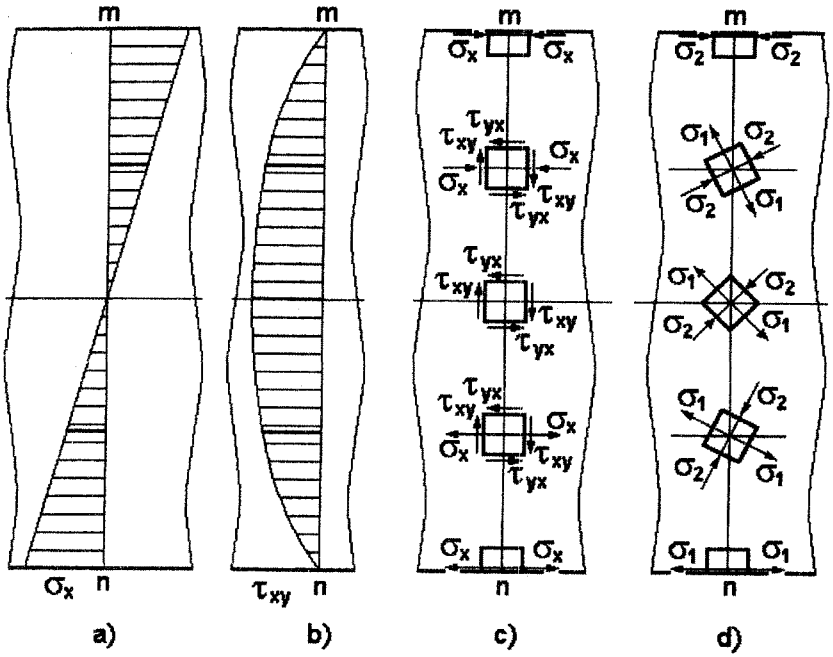


Fig. 6.13

Pentru cinci din punctele secţiunii se reprezintă pe câte un element de volum tensiunile din secţiune (fig. 6.13c), precum şi tensiunile principale şi direcţiile principale corespunzătoare (fig. 6.13d).

În punctul cel mai de jos al secţiunii există numai tensiune normală σ_x de întindere şi deci $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = 0$, direcţiile principale *1* şi *2* fiind paralele cu axele *Gx* şi respectiv *Gy*. Similar, în punctele cele mai de sus există numai tensiune normală σ_x de compresiune, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_x < 0$, direcţiile principale fiind paralele cu axele *Gy* şi respectiv *Gx*.

Într-un punct situat pe axa neutră a secţiunii $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} \neq 0$, solicitarea este de forfecare pură; tensiunile principale au valorile $\sigma_1 = \tau_{xy}$, $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ iar direcţiile principale sunt la 45° faţă de axa *Gx*.

În punctele secţiunii situate între aceste poziţii particulare, există atât tensiuni normale cât şi tensiuni tangenţiale iar tensiunile principale se calculează cu relaţia (6.41) şi direcţiile lor cu relaţia (6.40). Se observă că parcurgând pe înălţime secţiunea transversală, direcţiile principale se rotesc continuu între direcţiile corespunzătoare punctelor extreme.

6.4. Forme raţionale ale barelor drepte solicitate la încovoiere

Analizând formula lui Navier (6.8) pentru calculul tensiunilor normale σ_x, se constată că:
- distribuţia acestora este neuniformă pe înălţimea secţiunii transversale, cele mai solicitate fibre fiind cele extreme;
- tensiunile maxime sunt diferite de la o secţiune la alta dacă momentul încovoietor este variabil în lungul axei grinzii.

Rezultă că într-o grindă de secţiune constantă, tensiunea admisibilă σ_a este atinsă numai în fibrele extreme ale secţiunii în care momentul încovoietor este maxim, în toate celelalte secţiuni materialul nefiind solicitat la posibilităţile sale.

În consecinţă, pentru a realiza grinzi cu un consum cât mai mic de material trebuie urmărite simultan două aspecte: pe de o parte utilizarea unor forme raţionale pentru secţiunile transversale iar pe de altă parte, stabilirea legii de variaţie în lungul axei a dimensiunilor acestor secţiuni, în concordanţă cu mărimea momentului încovoietor.

Forme raţionale ale secţiunilor transversale

Deoarece tensiunile normale sunt distribuite neuniform pe înălţimea secţiunii transverale, rezultă că pentru a utiliza raţional posibilităţile de rezistenţă ale materialului, acesta trebuie dirijat într-o cantitate mai mare spre fibrele extreme, cele mai depărtate de axa neutră, acolo unde tensiunile au valori maxime.

Din acest punct de vedere sunt raţionale grinzile care au secţiunea transversală profil I, U, dreptunghi cu gaură dreptunghiulară etc.

Pentru o grindă de lungime l, cu secţiunea transversală constantă A, volumul de material utilizat la execuţia ei este $V = A \cdot l$. Pe de altă parte, efortul moment încovoietor maxim care poate acţiona într-o secţiune a grinzii, este cu atât mai mare cu cât modulul de rezistenţă este mai mare. Rezultă că din punct de vedere economic, eficienţa utilizării materialului poate fi apreciată prin mărimea raportului W_z/A; cu cât acest raport este mai mare, cu atât secţiunea este mai economică şi deci are o formă mai raţională. De exemplu,în cazul a două secţiuni de aceeaşi arie şi aceeaşi înălţime, una de formă dreptunghiulară şi cealaltă de formă circulară rezultă:

- pentru *secţiunea dreptunghiulară*:

$$\frac{W_z}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{bh} = 0{,}167h;$$

- pentru *secţiunea circulară*:

$$\frac{W_z}{A} = \frac{\frac{\pi d^3}{32}}{\frac{\pi d^2}{4}} = 0{,}125d = 0{,}125h.$$

Se constată că în acest exemplu, secţiunea dreptunghiulară este mai economică decât secţiunea circulară.

Stabilirea formei raţionale a unei secţiuni transversale trebuie să aibă în vedere şi modul de comportare al materialului la întindere şi compresiune, având în vedere că de o parte a axei neutre tensiunile sunt de întindere şi de cealaltă parte de compresiune.

În cazul în care materialul grinzii rezistă la fel la întindere şi compresiune (oţelul), secţiunile economice sunt cele simetrice faţă de axa neutră (Gz), la care, în fibrele extreme rezultă tensiuni cu valori egale în modul şi deci condiţia de rezistenţă $\sigma_{max} = \sigma_a$ este îndeplinită simultan atât pentru zona întinsă cât şi pentru cea comprimată.

În cazul în care materialul grinzii se comportă diferit la întindere şi compresiune (fonta), sunt indicate secţiunile nesimetrice faţă de axa neutră (de exemplu secţiunile în formă de T sau de I cu tălpile neegale ş.a.); la acestea exsită posibilitatea ca centrul de greutate G să fie astfel plasat încât tensiunile maxime de întindere şi de compresiune să fie egale cu tensiunile admisibile corespunzătoare, adică ambele condiţii de rezistenţă să fie îndeplinite simultan.

Bare cu secţiunea transversală variabilă.
Grinzi de egală rezistenţă

O grindă dreaptă este de egală rezistenţă la încovoiere dacă tensiunile maxime din toate secţiunile transversale sunt aceleaşi.

Pentru a realiza o grindă de egală rezistenţă, trebuie îndeplinită condiţia:

$$W_z(x) = \frac{|M_{iz}(x)|}{\sigma_a}. \qquad (6.46)$$

Impunându-se o anumită formă pentru secţiunea transversală astfel încât dimensiunile ei să poată fi exprimate în funcţie de un singur parametru, pe baza relaţiei (6.46) se stabileşte legea de variaţie a acestui parametru în lungul grinzii.

Se prezintă în continuare un exemplu de realizare a grinzii de egală rezistenţă pentru o bară încastrată la un capăt şi solocitată de o forţă concentrată la capătul liber (fig. 6.14a).
Momentul încovoietor dintr-o secţiune oarecare a grinzii este

$$M_{iz}(x) = - F \cdot x,$$

iar relaţia (6.46) devine:

$$W_z(x) = \frac{F \cdot x}{\sigma_a}. \qquad (6.47)$$

Pentru secţiunea transversală se analizează trei variante.

a) *Secţiunea dreptunghiulară cu înălţimea h = const şi lăţimea b(x) variabilă.*

Modulul de rezistenţă la încovoiere este în acest caz

$$W_z(x) = \frac{b(x) \cdot h^2}{6}.$$

Ţinând cont de relaţia (6.47) rezultă

$$b(x) = \frac{6Fx}{\sigma_a h^2}, \qquad (6.48)$$

adică o variaţie liniară a lăţimii secţiunii (fig. 6.14b).

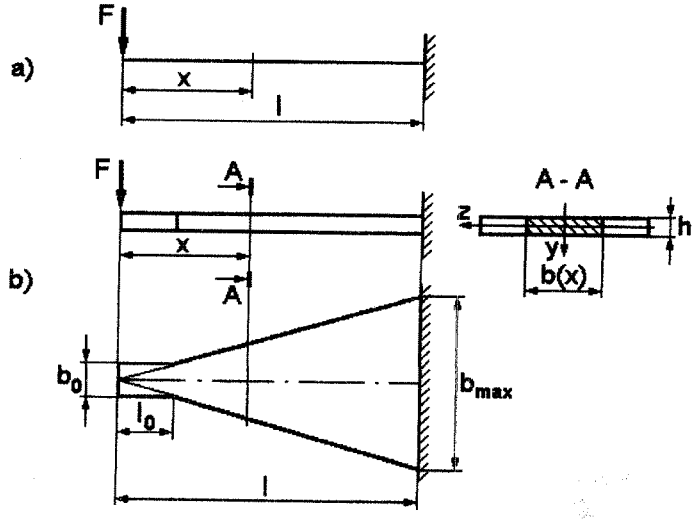


Fig. 6.14

La capătul liber, rezultă conform relaţiei (6.48) o lăţime nulă. Acest lucru nu este posibil dacă se ţine seama şi de prezenţa forţei tăietoare. Din condiţia de rezistenţă la forfecare se obţine lăţimea minimă a secţiunii dreptunghiulare:

$$b_0 = \frac{3F}{2h\tau_a}.$$

Cu relaţia (6.48) se calculează lungimea l_0 pe care bara este de secţiune constantă:

$$l_0 = \frac{\sigma_a}{\tau_a} \cdot \frac{h}{4}.$$

b) *Secţiunea dreptunghiulară cu lăţimea constantă b şi înălţimea h(x) variabilă*

În acest caz modulul de rezistenţă la încovoiere este

$$W_z(x) = \frac{bh^2(x)}{6}.$$

Ţinând cont de relaţia (6.47) rezultă

$$h(x) = \sqrt{\frac{6Fx}{b\sigma_a}}, \qquad (6.49)$$

adică o variaţie parabolică a înălţimii secţiunii (fig. 6.15).

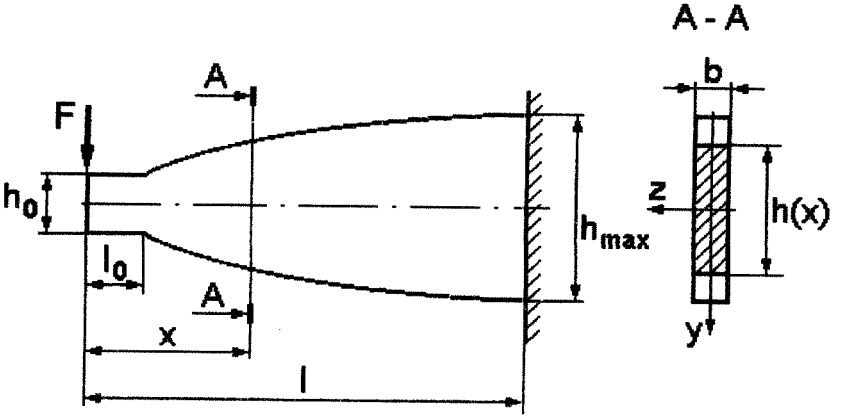


Fig. 6.15

Şi în acest caz, la capătul liber trebuie asigurată o înălţime minimă a secţiunii h_0, care se calculează din condiţia de rezistenţă la forfecare:

$$h_0 = \frac{3F}{2b\tau_a}.$$

Lungimea l_0 pe care secţiunea este constantă se calculează cu ajutorul relaţiei (6.49); se obţine:

$$l_0 = \frac{3F\sigma_a}{8b\tau_a^2}.$$

c) *Secţiunea circulară*

Pentru secţiunea circulară modulul de rezistenţă la încovoiere este

$$W_z(x) = \frac{\pi d^3(x)}{32}.$$

Ţinând cont de relaţia (6.47) rezultă:

$$d(x) = \sqrt[3]{\frac{32Fx}{\pi\sigma_a}}, \qquad (6.50)$$

adică diametrul variază după o parabolă cubică (fig. 6.16).

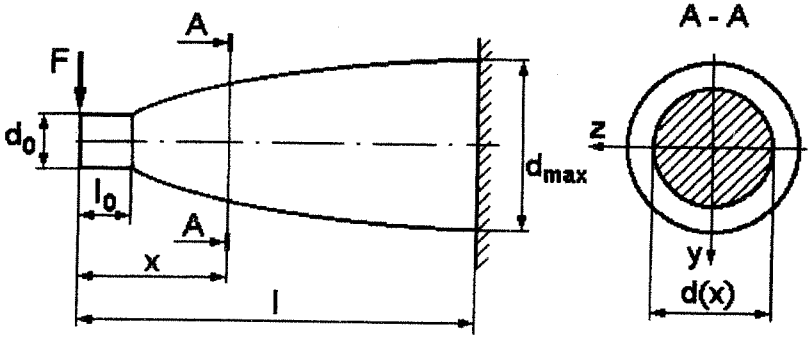


Fig. 6.16

Din condiţia de rezistenţă la forfecare rezultă diametrul minim d_0, al secţiunii constante de la capătul liber

$$d_0 = \sqrt{\frac{16F}{3\pi\tau_a}},$$

iar din relaţia (6.50), lungimea l_0 pe care secţiunea are acest diametru:

$$l_0 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_a}{\tau_a}\sqrt{\frac{F}{3\pi\tau_a}}.$$

Realizarea practică a soluţiei obţinute pentru legea de variaţie a diametrului secţiunii transversale este dificilă şi de aceea se recurge la executarea grinzii din tronsoane cilindrice sau conice.

6.5. Concentratori de tensiuni

La încovoiere, ca şi în cazul solicitărilor de tracţiune şi torsiune, în dreptul schimbărilor bruşte de formă şi dimensiuni ale secţiunilor se produc concentrări ale tensiunilor.

Tensiunea maximă din secţiunea cu concentrator se calculează cu relaţia:

$$\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n \,, \qquad (6.51)$$

unde α_k este coeficientul de concentrare a tensiunilor;

σ_n tensiunea nominală calculată cu formula lui Navier.

Valorile coeficientului de concentrare a tensiunilor depind de parametrii geometrici care definesc trecerea de la o secţiune la alta. De exemplu, în figura 6.17 se prezintă variaţia coeficientului α_k la schimbarea bruscă a secţiunii de la diametrul d la diametrul D, cu raza de racordare r.

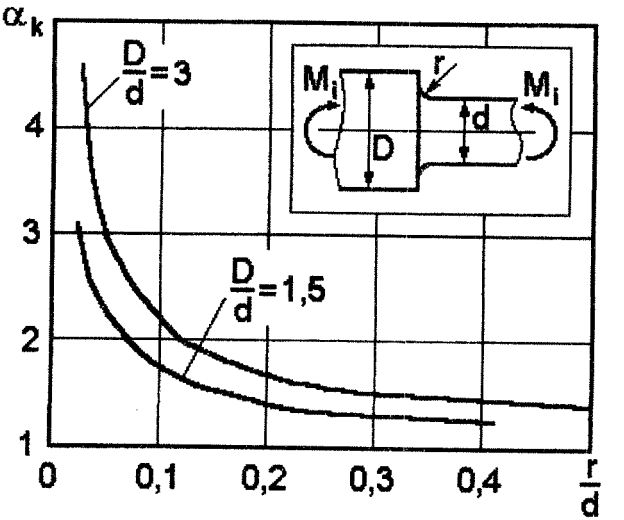


Fig. 6.17

Se observă că valoarea coeficientului de concentrare a tensiunilor este cu atât mai mică cu cât raza de racordare r, dintre cele două tronsoane de diametre diferite, este mai mare.

6.6. Deformaţii şi deplasări ale barelor drepte solicitate la încovoiere

De foarte multe ori barele solicitate la încovoiere trebuie să satisfacă pe lângă condiţia de rezistenţă şi condiţia de rigiditate adică, barele trebuie dimensionate astfel încât deformaţiile maxime să nu depăşească anumite limite impuse de condiţiile de exploatare.

Ca urmare a solicitării la încovoiere apar alungiri şi scurtări ale fibrelor longitudinale (§6.1); deformaţia liniară specifică în lungul acestora se calculează cu relaţia:

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}, \tag{6.52}$$

unde y este distanţa de la fibra lungitudinală la planul neutru;

ρ - raza de curbură a axei neutre.

Prin încovoiere, axa barei, iniţial dreaptă, se transformă într-o axă curbă.

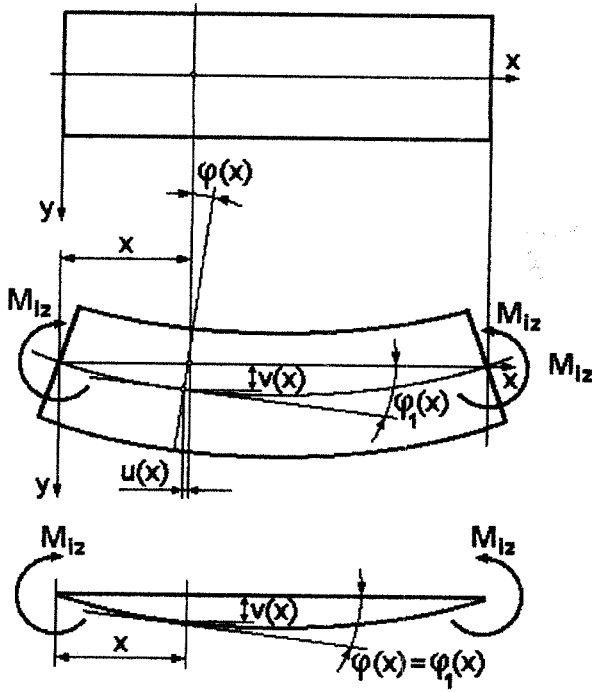


Fig. 6.18

Ca urmare a deformării barei se produc deplasări liniare şi unghiulare (fig. 6.18):

- deplasarea *v(x)* pe direcţia *y*, a unui punct de pe axa barei, numită *săgeată*;
- deplasarea *u(x)* pe direcţia *x*, a unui punct de pe axa barei;
- *rotirea* $\varphi(x)$, a unei secţiuni transversale în jurul axei sale neutre;
- rotirea $\varphi_1(x)$, a axei barei, definită ca unghiul dintre tangenta la axa deformată a barei şi axa nedeformată a acesteia.

Deformaţiile grinzilor fiind în general foarte mici, deplasările *u(x)* se neglijează, iar ipoteza secţiunilor plane conduce la egalitatea rotirilor, $\varphi(x) = \varphi_1(x)$; aceasta presupune neglijarea efectului forţei tăietoare asupra deformaţiilor, efect care aşa cum s-a arătat (§6.2), conduce la deplanarea secţiunilor. În calcule, datorită deformaţiilor mici, rotirea $\varphi(x)$ a secţiunii transversale, se scrie $\varphi(x) = \text{tg}\,\varphi(x)$.

Studiul deplasărilor grinzii presupune stabilirea funcţiei axei deformate *v(x)*, care reprezintă sageata într-un punct oarecare *x* de pe axa barei, precum şi a funcţiei rotirilor $\varphi(x) = \dfrac{dv(x)}{dx}$.

6.6.1. Ecuaţia diferenţială a axei deformate

La calculul tensiunilor normale din barele drepte solicitate la încovoiere s-a stabilit relaţia:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_{iz}(x)}{EI_z}.$$

Pentru porţiunile de grindă unde $M_{iz}(x) = const.$ ($T_y(x) = 0$), şi secţiunea este constantă, rezultă $\rho(x) = \text{const}$, adică axa deformată a grinzii este un arc de cerc.

În cazul general al încovoierii simple, când momentul încovoietor variază în lungul grinzii, ţinând seama şi de expresia curburii axei deformate, relaţia de mai sus devine:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\dfrac{d^2v(x)}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dv(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_{iz}(x)}{EI_z}. \qquad (6.53)$$

Deoarece rotirea $\dfrac{dv(x)}{dx} = tg\varphi(x) = \varphi(x)$ are valori foarte mici, pătratul ei se poate neglija în comparaţie cu unitatea şi relaţia (6.53) devine:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \pm \frac{M_{iz}(x)}{EI_z}. \qquad (6.54)$$

Semnul din membrul drept al relaţiei (6.54) depinde de orientarea axelor de coordonate şi de convenţia de semne pentru momentul încovoietor. Pentru sistemul de axe din figura (6.18), atunci când momentul încovoietor este pozitiv, curbura este negativă iar când momentul încovoietor este negativ, curbura este pozitivă şi deci în membrul drept se consideră semnul minus:

$$\boxed{\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M_{iz}(x)}{EI_z}} \qquad (6.55)$$

Relaţia (6.55) reprezintă *ecuaţia diferenţială a axei deformate.*

6.6.2. Integrarea directă a ecuaţiei diferenţiale a axei deformate

Cunoscând expresia momentului încovoietor $M_{iz}(x)$, prin integrări succesive ale ecuaţiei (6.55) se obţin expresiile rotirilor $\varphi(x)$ şi săgeţilor $v(x)$:

$$\varphi(x) = -\int \frac{M_{iz}(x)}{EI_z} dx + C; \qquad (6.56)$$

$$v(x) = -\int \left[\int \frac{M_{iz}(x)}{EI_z} dx \right] dx + Cx + D, \qquad (6.57)$$

unde C şi D sunt constante de integrare.

Pentru o bară cu *n* regiuni se obţin *2n* constante de integrare. Constantele de integrare se determină folosind condiţiile pe care trebuie să le satisfacă săgeata şi rotirea în diferite puncte ale grinzii. Aceste condiţii sunt:

- *condiţii de rezemare*
  - săgeata este nulă în reazemul simplu, articulaţie şi încastrare;
  - rotirea este nulă în încastrare;
- *condiţii de continuitate*
  - săgeţile şi respectiv rotirile au aceleaşi valori într-un punct de trecere de la o regiune la alta.

Aplicarea acestei metode este exemplificată pe câteva cazuri, în cele ce urmează.

Grinda încastrată la un capăt şi încărcată cu o forţă concentrată la capătul liber.

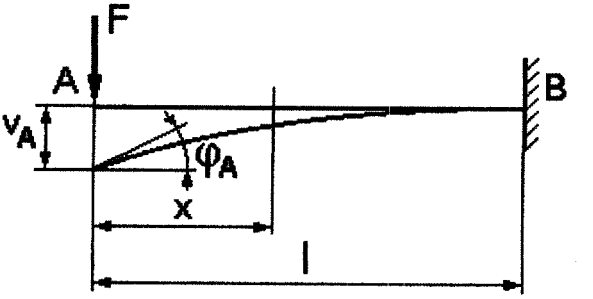


Fig. 6.19

Se consideră grinda din figura 6.19 la care momentul încovoietor în secţiunea *x* are expresia:

$$M_{iz}(x) = -F \cdot x, \quad \forall x \in (0,l),$$

Ecuaţia diferenţială a axei deformate este:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{Fx}{EI_z}.$$

Integrând de două ori această ecuație se obține:

$$\varphi(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{Fx^2}{2EI_z} + C$$

$$v(x) = \frac{Fx^3}{6EI_z} + Cx + D$$

Constantele C și D se determină din condițiile de rezemare:

- pentru $x = l$, $\varphi(x) = 0 \Rightarrow \frac{Fl^2}{2EI_z} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{Fl^2}{2EI_z}$;

- pentru $x = l$, $v(x) = 0 \Rightarrow \frac{Fl^3}{6EI_z} - \frac{Fl^3}{2EI_z} + D = 0 \Rightarrow D = \frac{Fl^3}{3EI_z}$.

Cu aceste constante, expresiile rotirii și respectiv săgeții devin:

$$\varphi(x) = \frac{Fx^2}{2EI_z} - \frac{Fl^2}{2EI_z}; \qquad (6.58)$$

$$v(x) = \frac{Fx^3}{6EI_z} - \frac{Fl^2x}{2EI_z} + \frac{Fl^3}{3EI_z}. \qquad (6.59)$$

Relațiile (6.58) și (6.59) permit calculul săgeții și rotirii în orice punct al grinzii. Valorile maxime se obțin la capătul liber:

$$\varphi_{max} = -\frac{Fl^2}{2EI_z}; \qquad (6.60)$$

$$v_{max} = \frac{Fl^3}{3EI_z}. \qquad (6.61)$$

Se observă că rotirea și săgeata la capătul liber, unde a fost aleasă originea pentru x, sunt egale cu valorile constantelor de integrare C și respectiv D.

Grinda simplu rezemată la capete încărcată cu o forță uniform distribuită.

Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare x a grinzii din figura 6.20 este:

$$M_{iz}(x) = V_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

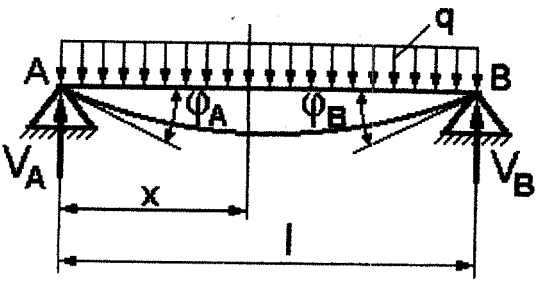


Fig. 6.20

Se scrie ecuaţia diferenţială a axei deformate şi se integrează de două ori:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{qx^2 - qlx}{2EI_z};$$

$$\varphi(x) = \frac{q}{2EI_z}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2}\right) + C;$$

$$v(x) = \frac{q}{2EI_z}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6}\right) + Cx + D.$$

Impunând condiţiile de rezemare

- la $x = 0$, $v(x) = 0$;
- la $x = l$, $v(x) = 0$;

se obţin constantele de integrare:

$$C = \frac{ql^3}{24EI_z}, \qquad D = 0.$$

Înlocuind constantele de integrare rezultă funcţiile:

$$\varphi(x) = \frac{q}{2EI_z}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} + \frac{l^3}{12}\right); \tag{6.62}$$

$$v(x) = \frac{q}{2EI_z}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6} + \frac{l^3x}{12}\right). \tag{6.63}$$

Săgeata maximă este la mijlocul grinzii iar rotirile maxime în reazeme:

$$v_{max} = \frac{5ql^4}{384EI_z}; \tag{6.64}$$

$$\varphi_{max} = \varphi_A = -\varphi_B = \frac{ql^3}{24EI_z}. \tag{6.65}$$

Grinda simplu rezemată la capete, încărcată cu o forță concentrată

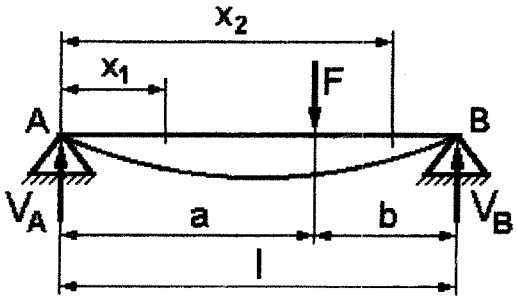


Fig. 6.21

Momentele încovoietoare pe cele două regiuni ale grinzii din figura 6.21 sunt:

- regiunea AC, $x_1 \in (0,a)$; $\quad M_{iz}(x_1) = V_A x_1 = \frac{Fb}{l} x_1;$

- regiunea BC, $x_2 \in (a,l)$; $\quad M_{iz}(x_2) = V_B(l - x_2) = \frac{Fa}{l}(l - x_2).$

Ecuațiile diferențiale ale axei deformate pe cele două regiuni ale grinzii sunt:

$$\frac{d^2v(x_1)}{dx_1} = -\frac{Fb}{lEI_z} x_1;$$

$$\frac{d^2v(x_2)}{dx_2} = -\frac{Fa}{lEI_z}(l - x_2).$$

Se integrează succesiv de două ori fiecare ecuaţie diferenţială şi se obţine:

$$\varphi(x_1) = -\frac{Fb}{2lEI_z}x_1^2 + C_1;$$

$$v(x_1) = -\frac{Fb}{6lEI_z}x_1^3 + C_1x_1 + D_1;$$

$$\varphi(x_2) = -\frac{Fa}{lEI_z}\left(lx_2 - \frac{x_2^2}{2}\right) + C_2;$$

$$v(x_2) = -\frac{Fa}{lEI_z}\left(l\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6}\right) + C_2x_2 + D_2.$$

Pentru determinarea constantelor de integrare se impun următoarele condiţii:

- de *rezemare*

la $x_1 = 0$, $v(x_1) = 0$;
la $x_2 = l$, $v(x_2) = 0$;

- de *continuitate*

la $x_1 = x_2 = a$, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$;
la $x_1 = x_2 = a$, $v(x_1) = v(x_2)$.

Rezolvând sistemul dat de condiţiile impuse, se obţin constantele:

$$C_1 = \frac{Fab}{6lEI_z}(l + b); \quad D_1 = 0;$$

$$C_2 = \frac{Fa}{6lEI_z}(2l^2 + a^2); \quad D_2 = -\frac{Fa^3}{6EI_z}.$$

Funcţiile pentru calculul rotirilor şi săgeţilor pe cele două regiuni ale grinzii sunt:

$$\varphi(x_1) = \frac{Fa^2b^2}{6lEI_z}\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3x_1^2}{a^2b}\right); \tag{6.66}$$

$$v(x_1) = \frac{Fa^2b^2}{6lEI_z}\left(\frac{2x_1}{a} + \frac{x_1}{b} - \frac{x_1^3}{a^2b}\right); \tag{6.67}$$

$$\varphi(x_2) = \frac{Fal}{6EI_z}\left(2 + \frac{a^2}{l^2} - \frac{6x_2}{l} + \frac{3x_2^2}{l^2}\right); \qquad (6.68)$$

$$v(x_2) = \frac{Fal^2}{6EI_z}\left[-\frac{a^2}{l^2} + \left(2 + \frac{a^2}{l^2}\right)\frac{x_2}{l} - \frac{3x_2^2}{l^2} + \frac{x_2^3}{l^3}\right]. \qquad (6.69)$$

Dacă $a > b$, săgeata maximă a grinzii este în prima regiune; rezolvând ecuaţia $\varphi(x_1) = 0$ se găseşte poziţia secţiunii unde săgeata este maximă:

$$x_1 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}.$$

Înlocuind această valoare în relaţia (6.67) se obţine săgeata maximă:

$$v_{max} = \frac{Fbl^2}{27EI_z}\sqrt{3\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)^3}. \qquad (6.70)$$

În punctul de aplicaţie al forţei săgeata şi rotirea sunt:

$$v = \frac{Fa^2b^2}{3lEI_z}; \qquad \varphi = -\frac{Fab(a-b)}{3lEI_z}. \qquad (6.71)$$

Dacă $a = b = l/2$ se obţine cea mai mare valoare a săgeţii maxime, (în dreptul forţei concentrate):

$$v_{max} = \frac{Fl^3}{48EI_z}. \qquad (6.72)$$

În acest caz rotirile secţiunilor din reazeme sunt:

$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{Fl^2}{16EI_z}. \qquad (6.73)$$

Se observă că metoda integrării directe a ecuaţiei axei deformate este avantajoasă dacă grinda are o singură regiune; în cazul când pe grindă sunt mai multe regiuni, metoda este laborioasă şi este indicată folosirea altor procedee de calcul.

6.6.3. Metoda Clebsch

După cum s-a arătat în paragraful precedent, metoda integrării directe devine laborioasă în cazul grinzilor cu încărcări complexe. Calculul se simplifică mult în cazul grinzilor de rigiditate constantă, dacă se utilizează un alt procedeu pentru scrierea şi integrarea ecuaţiei diferenţiale a axei deformate, prin care se ajunge la numai două constante de integrare, indiferent de numărul regiunilor.

În acest scop, trebuie respectate următoarele *condiţii*:

- se alege o origine unică, la unul din capetele grinzii, pentru poziţionarea secţiunilor din toate regiunile barei;
- momentul încovoietor din orice secţiune se scrie considerând toate sarcinile de la origine până la secţiune;
- toţi termenii momentelor încovoietoare trebuie să conţină binoame de tipul

$$(x_i - a_j)^n$$

unde x_i este distanţa de la originea aleasă iniţial până la secţiunea din regiunea i;

a_j - abscisele punctelor de demarcaţie a regiunilor;

n - un număr natural;

- momentul încovoietor dintr-o regiune oarecare trebuie să conţină toţi termenii momentului încovoietor din regiunea precedentă;
- integrarea ecuaţiei diferenţiale se face fără a desface parantezele binoamelor $(x_i - a_j)^n$.

Se ilustrează modul de obţinere a numai două constante de integrare, pe grinda din figura 6.22, de rigiditate $EI_z = const.$
Se alege originea la capătul din stânga al barei, în punctul $O \equiv A$.
Ţinând cont de condiţiile menţionate, se scriu pentru cele cinci regiuni expresiile momentelor încovoietoare şi ecuaţiile diferenţiale ale axei deformate, care se integrează succesiv pentru a obţine funcţiile corespunzătoare ale rotirilor şi săgeţilor.

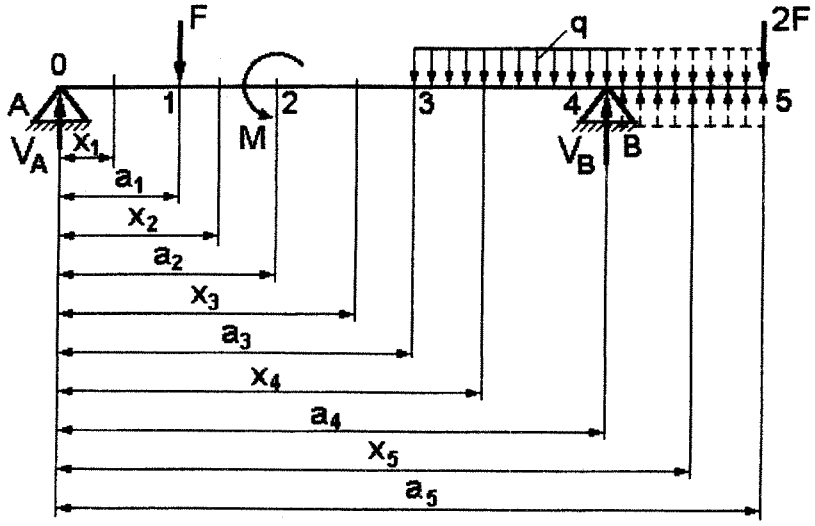


Fig. 6.22

Regiunea O -1; $x_1 \in (0, a_1)$:

$$M_{iz}(x_1) = V_A x_1;$$

$$EI_z \frac{d^2 v(x_1)}{dx_1^2} = -V_A x_1;$$

$$EI_z \varphi(x_1) = -V_A \frac{x_1^2}{2} + C_1;$$

$$EI_z v(x_1) = -V_A \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + D_1.$$

Regiunea 1-2; $x_2 \in (a_1, a_2)$:

$$M_{iz}(x_2) = V_A x_2 - F(x_2 - a_1);$$

$$EI_z \frac{d^2 v(x_2)}{dx_2^2} = -V_A x_2 + F(x_2 - a_1);$$

$$EI_z \varphi(x_2) = -V_A \frac{x_2^2}{2} + F\frac{(x_2 - a_1)^2}{2} + C_2;$$

$$EI_z v(x_2) = -V_A \frac{x_2^3}{6} + F\frac{(x_2 - a_1)^3}{6} + C_2 x_2 + D_2.$$

Regiunea 2-3; $x_3 \in (a_2, a_3)$:

$$M_{iz}(x_3) = V_A x_3 - F(x_3 - a_1) - M(x_3 - a_2)^0;$$

în care momentul concentrat M s-a înmulţit cu binomul $(x_3 - a_2)^0 = 1$

$$EI_z \frac{d^2 v(x_3)}{dx_3^2} = -V_A x_3 + F(x_3 - a_1) + M(x_3 - a_2)^0;$$

$$EI_z \varphi(x_3) = -V_A \frac{x_3^2}{2} + F\frac{(x_3 - a_1)^2}{2} + M(x_3 - a_2) + C_3 x_3;$$

$$EI_z v(x_3) = -V_A \frac{x_3^3}{6} + F\frac{(x_3 - a_1)^3}{6} + M\frac{(x_3 - a_2)^2}{2} + C_3 x_3 + D_3.$$

Regiunea 3-4; $x_4 \in (a_3, a_4)$:

$$M_{iz}(x_4) = V_A x_4 - F(x_4 - a_1) - M(x_4 - a_2)^0 - \frac{q(x_4 - a_3)^2}{2};$$

$$EI_z \frac{d^2 v(x_4)}{dx_4^2} = -V_A x_4 + F(x_4 - a_1) + M(x_4 - a_2)^0 + \frac{q(x_4 - a_3)^2}{2};$$

$$EI_z \varphi(x_4) = -V_A \frac{x_4^2}{2} + F\frac{(x_4 - a_1)^2}{2} + M(x_4 - a_2) + \frac{q(x_4 - a_3)^3}{6} + C_4 x_4;$$

$$EI_z v(x_4) = -V_A \frac{x_4^3}{6} + F\frac{(x_4 - a_1)^3}{6} + M\frac{(x_4 - a_2)^2}{2} + \frac{q(x_4 - a_3)^4}{24} + C_4 x_4 + D_4$$

Regiunea 4-5; $x_5 \in (a_4, a_5)$:

$$M_{iz}(x_5) = V_A x_5 - F(x_5 - a_1) - M(x_5 - a_2)^0 - \frac{q(x_5 - a_3)^2}{2} + \frac{q(x_5 - a_4)^2}{2} + V_B(x_5 - a_4);$$

în care sarcina uniform distribuită din regiunea *3 - 4* s-a prelungit până în secţiunea x_5, astfel încât să apară binomul $(x_5 - a_3)^2$; pentru a nu schimba încărcarea iniţială, se consideră şi forţa uniform distribuită egală şi de sens contrar cu cea adăugată anterior;

$$EI_z \frac{d^2v(x_5)}{dx_5^2} = -V_A x_5 + F(x_5 - a_1) + M(x_5 - a_2)^0 + \frac{q(x_5 - a_3)^2}{2} -$$

$$- \frac{q(x_5 - a_4)^2}{2} - V_B(x_5 - a_4);$$

$$EI_z\varphi(x_5) = -V_A \frac{x_5^2}{2} + F\frac{(x_5 - a_1)^2}{2} + M(x_5 - a_2) + \frac{q(x_5 - a_3)^3}{6} -$$

$$- \frac{q(x_5 - a_4)^3}{6} - V_B \frac{(x_5 - a_4)^2}{2} + C_5 x_5;$$

$$EI_z v(x_5) = -V_A \frac{x_5^3}{6} + F\frac{(x_5 - a_1)^3}{6} + M\frac{(x_5 - a_2)^2}{2} + \frac{q(x_5 - a_3)^4}{24} -$$

$$- \frac{q(x_5 - a_4)^4}{24} - V_B \frac{(x_5 - a_4)^3}{6} + C_5 x_5 + D_5.$$

La trecerea dintr-o regiune în alta, se pun condiţiile de continuitate:

- la $x_1 = x_2 = a_1$, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow C_1 = C_2$;
  $v(x_1) = v(x_2) \Rightarrow D_1 = D_2$;
- la $x_2 = x_3 = a_2$, $\varphi(x_2) = \varphi(x_3) \Rightarrow C_2 = C_3$;
  $v(x_2) = v(x_3) \Rightarrow D_2 = D_3$;
- la $x_3 = x_4 = a_3$, $\varphi(x_3) = \varphi(x_4) \Rightarrow C_3 = C_4$;
  $v(x_3) = v(x_4) \Rightarrow D_3 = D_4$;
- la $x_4 = x_5 = a_4$, $\varphi(x_4) = \varphi(x_5) \Rightarrow C_4 = C_5$;
  $v(x_4) = v(x_5) \Rightarrow D_4 = D_5$.

Din condiţiile de mai sus rezultă:

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C$;
$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D$.

Se constată că prin acest procedeu s-au obţinut numai două constante de integrare. Ele se determină impunând condiţiile de rezemare:

- la $x_1 = 0$, $v(x_1) = 0 \Rightarrow D = 0$;
- la $x_4 = a_4$, $v(x_4) = 0 \Rightarrow$

$$C = \frac{1}{a_4}\left[V_A \frac{a_4^3}{6} - \frac{F(a_4 - a_1)^3}{6} - \frac{M(a_4 - a_2)^2}{2} - \frac{q(a_4 - a_3)^4}{24}\right].$$

Se observă că cele două constante de integrare C şi D, împărţite la rigiditatea grinzii, reprezintă rotirea şi respectiv săgeata în originea aleasă iniţial.

Din exemplul prezentat se constată că pentru a simplifica şi mai mult calculele, este suficient să se scrie expresia momentului încovoietor în ultima regiune a grinzii, respectând condiţiile impuse de acest procedeu. Expresiile rotirii şi respectiv săgeţii de pe această regiune, permit calculul deplasărilor în oricare din regiunile precedente, dacă se reţin numai termenii corespunzători acelei regiuni. Se observă cu uşurinţă, că într-o regiune oarecare x apar numai termenii care conţin binoame $(x-a_j)^n$ cu $a_j < x$.

6.6.4. Metoda grafo-analitică

Metoda grafo-analitică se bazează pe interpretarea geometrică a rezultatelor obţinute prin dubla integrare a ecuaţiei diferenţiale a axei deformate. Pentru aplicarea acestei metode este necesară diagrama de momente încovoietoare a grinzii.

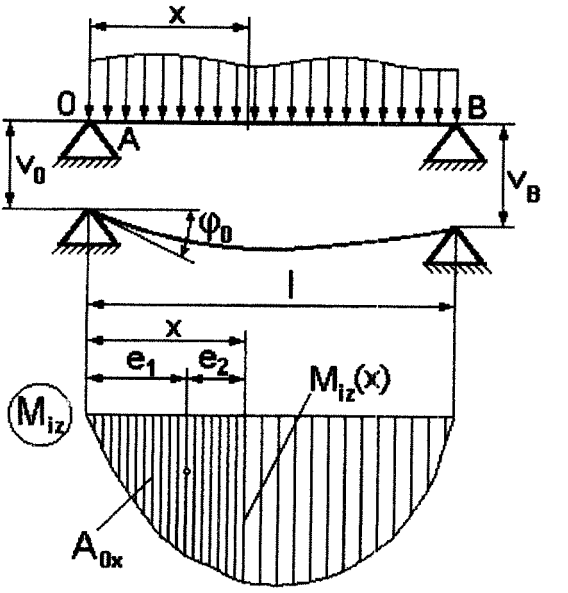


Fig. 6.23

Se consideră o grindă dreaptă de rigiditate $EI_z = const.$, cu o încărcare oarecare, căreia îi corespunde diagrama de momente încovoietoare din figura 6.23.

Pentru cazul general se presupune că reazemele sunt tasabile, săgeţile grinzii în dreptul acestora fiind v_A şi respectiv v_B. La scrierea ecuaţiei diferenţiale a axei deformate se consideră că originea pentru poziţionarea tuturor secţiunilor este capătul din stânga al barei, unde rotirea are valoarea φ_0 iar săgeata $v_0 = v_A$.

Prin integrarea ecuaţiei diferenţiale a axei deformate (6.55) se obţine, aşa cum s-a arătat, expresia rotirii într-o secţiune oarecare situată la distanţa x de origine:

$$\varphi(x) = \frac{dv(x)}{dx} = -\frac{1}{EI_z}\int_0^x M_{iz}(x)\,dx + C.$$

Dar, după cum se poate observa,

$$\int_0^x M_{iz}(x)\,dx = A_{0x} \qquad (6.74)$$

unde A_{0x} este suprafaţa diagramei de momente încovoietoare din origine până la secţiunea x.

Înlocuind integrala (6.74) în expresia rotirii, se obţine:

$$\varphi(x) = \frac{dv(x)}{dx} = -\frac{A_{0x}}{EI_z} + C. \qquad (6.75)$$

Constanta C se determină din condiţia ca la $x = 0$, $\varphi(x) = \varphi_0$. Ţinând seama că pentru $x = 0$, $A_{0x} = A_{00} = 0$, rezultă $C = \varphi_0$.

Astfel relaţia pentru calculul rotirilor prin metoda grafo-analitică este:

$$\boxed{\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{A_{0x}}{EI_z}} \qquad (6.76)$$

Integrând relaţia (6.76), rezultă:

$$v(x) = \varphi_0 \cdot x - \frac{1}{EI_z}\int_0^x A_{0x}\,dx + D. \qquad (6.77)$$

Pentru calculul integralei din membrul drept al relaţiei (6.77) se utilizează procedeul de integrare prin părţi:

$$\int_0^x A_{0x}dx = A_{0x}\cdot x - \int_0^x x\cdot dA_{0x} = A_{0x}\cdot x - A_{0x}\cdot e_1 = A_{0x}(x-e_1) =$$

$$= A_{0x}\cdot e_2 = S_{0x}$$

unde e_1 este abscisa centrului de greutate al suprafeţei A_{ox};

S_{ox} - momentul static al suprafeţei diagramei de momente încovoietoare din origine până în secţiunea x, calculat faţă de secţiunea x.

Ecuaţia axei deformate devine:

$$v(x) = \varphi_0\cdot x - \frac{S_{0x}}{EI_z} + D. \qquad (6.78)$$

Constanta D se determină din condiţia ca la $x = 0$, $v(x) = v_0$. Ţinând seama că pentru $x = 0$, $S_{0x} = S_{00} = 0$, rezultă $D = v_0$.

Astfel relaţia pentru calculul săgeţilor prin metoda grafo-analitică este:

$$\boxed{v(x) = v_0 + \varphi_0\cdot x - \frac{S_{0x}}{EI_z}} \qquad (6.79)$$

În continuare, se dau două exemple de aplicare a acestei metode.

a) Pentru grinda simplu rezemată la capete şi încărcată cu o forţă concentrată F, (fig. 6.24) se calculează deplasările secţiunii grinzii din dreptul forţei.

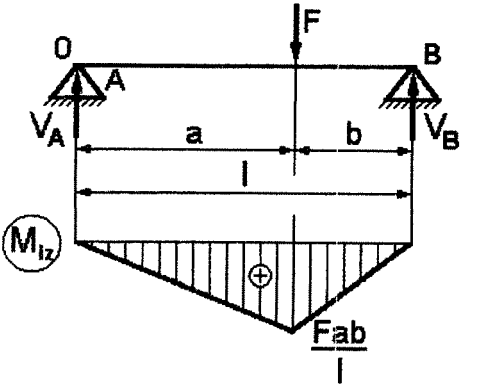


Fig. 6.24

Se alege originea lui x în punctul A, şi se determină rotirea φ_0 şi săgeata v_0 din condiţiile de rezemare:

- la $x = 0$, $v(x) = 0$; $\Rightarrow$ $v_0 = 0$;

- la $x = l$, $v(x) = 0$; $\Rightarrow$ $\varphi_0 = \dfrac{S_{0l}}{lEI_z}$.

Pe baza diagramei de momente încovoietoare se scrie:

$$S_{0l} = l \cdot \frac{Fab}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(l+b)}{3} = \frac{Fab}{6}(l+b) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{Fab}{6lEI_z}(l+b).$$

Rotirea secţiunii transversale din dreptul punctului de aplicaţie al forţei este

$$\varphi(a) = \varphi_0 - \frac{A_{0a}}{EI_z} = \frac{Fab}{6lEI_z}(l+b) - \frac{a \cdot Fab}{2lEI_z} = -\frac{Fab(a-b)}{3lEI_z},$$

iar săgeata grinzii în acelaşi punct este

$$v(a) = \frac{Fab}{6lEI_z}(l+b) \cdot a - \frac{S_{0a}}{EI_z} = \frac{Fa^2b}{6lEI_z}(l+b) - \frac{a \cdot Fab}{2lEI_z} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Fa^2b^2}{3lEI_z}.$$

Se constată că se regăsesc relaţiile (6.71) stabilite prin metoda integrării directe.

b) Pentru grinda de rigiditate consatantă la încovoiere, încastrată la un capăt şi încărcată cu o forţă uniform distribuită pe toată lungimea (fig. 6.25), se calculează deplasările de la capătul liber.

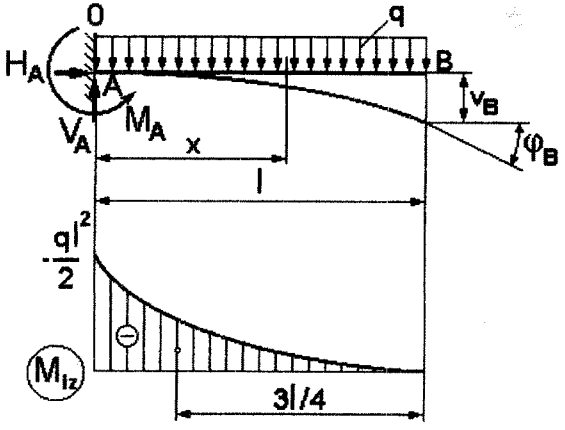


Fig. 6.25

Din ecuaţiile de echilibru rezultă reacţiunile:

$V_A = ql;$ $M_A = ql^2/2;$ $H_A = 0.$

Alegând originea lui x în punctul A, momentul încovoietor în secţiunea x este:

$$M_{iz}(x) = -\frac{ql^2}{2} + qlx - \frac{qx^2}{2}; \quad \forall x \in (0,l).$$

Deoarece originea a fost aleasă în încastrare, $\varphi_0 = 0$, $v_0 = 0$.

Deplasările de la capătul liber al grinzii sunt:

$$\varphi(l) = -\frac{A_{0l}}{EI_z} = -\frac{\left(-\frac{ql^2}{2}\right)\cdot 1 \cdot \frac{1}{3}}{EI_z} = \frac{ql^3}{6EI_z}$$

$$v(l) = -\frac{S_{0l}}{EI_z} = -\frac{\left(-\frac{ql^2}{2}\right)\cdot 1 \cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{3l}{4}}{EI_z} = \frac{ql^4}{8EI_z}$$

Valorile calculate reprezintă deplasările maxime ale grinzii din figura 6.25.

6.7. Calculul energiei potenţiale de deformaţie

La solicitarea de *încovoiere pură*, în secţiunea transversală a grinzii drepte apar numai tensiuni normale σ, iar energia potenţială de deformaţie înmagazinată într-un volum elementar (v. §3.3)este

$$dU = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} dV.$$

Ţinând seama de legea lui Hooke, de formula lui Navier (6.8) şi de faptul că $dV = dA \cdot dx$, energia potenţială de deformaţie înmagazinată în grindă este

$$U = \iiint_{(V)} \frac{\sigma^2(x,y)}{2E} dV = \iiint_{(V)} \frac{M_{iz}^2(x)\cdot y^2}{2EI_z^2(x)} dV =$$

$$= \int_{(l)} \frac{M_{iz}^2(x)}{2EI_z^2(x)} \left(\iint_{(A)} y^2 dA \right) dx = \int_{(l)} \frac{M_{iz}^2(x)}{2EI_z^2(x)} I_z(x) dx = \int_{(l)} \frac{M_{iz}^2(x)}{2EI_z(x)} dx$$

Se obţine deci:

$$\boxed{U = \int_{(l)} \frac{M_{iz}^2(x)}{2EI_z(x)}dx} \qquad (6.80)$$

Pentru cazul particular al unei bare cu rigiditatea la încovoiere constantă, solicitată la încovoiere simplă de un moment încovoietor constant M_{iz}, energia potenţială de deformaţie este:

$$U = \frac{M_{iz}^2 l}{2EI_z}. \qquad (6.81)$$

În cazul barelor solicitate la *încovoiere simplă*, în secţiunile barei apare în afară de tensiunea normală σ, şi tensiunea tangenţială τ, iar energia potenţială de deformaţie înmagazinată într-un volum elementar este:

$$dU = dU_\sigma + dU_\tau = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}dV + \frac{\tau \cdot \gamma}{2}dV.$$

Ţinând seama de legea lui Hooke, de formula lui Juravski (6.19) şi de faptul că $dV = dA \cdot dx$, energia potenţială de deformaţie înmagazinată în grindă datorită tensiunilor tangenţiale este:

$$U_\tau = \iiint_{(V)} \frac{\tau_{xy}^2(x,y)}{2G}dV = \iiint_{(V)} \frac{T_y^2(x)S_z^2(y)}{2Gb^2(y)I_z^2}dV =$$

$$= \int_{(l)} \frac{T_y^2(x)}{2G}\left(\frac{1}{I_z^2}\iint_{(A)} \frac{S_z^2(y)}{b^2(y)}dA\right)dx = \int_{(l)} \frac{T_y^2(x)}{2GA}\left(\frac{A}{I_z^2}\iint_{(A)} \frac{S_z^2(y)}{b^2(y)}dA\right)dx =$$

$$= \int_{(l)} \frac{kT_y^2(x)}{2GA}dx$$

unde

$$k = \frac{A}{I_z^2}\iint_{(A)} \frac{S_z^2(y)}{b^2(y)}dA, \qquad (6.82)$$

este un coeficient adimensional a cărui valoare depide de forma secţiunii transversale şi care ţine seama de distribuţia neuniformă a tensiunilor tangenţiale pe înălţimea secţiunii.

Energia potențială de deformație înmagazinată în bară la solicitarea de încovoiere simplă este dată de relația:

$$U = U_\sigma + U_\tau = \int_{(l)} \frac{M_{iz}^2(x)}{2EI_z(x)}dx + \int_{(l)} \frac{kT_y^2(x)}{2GA(x)}dx \qquad (6.83)$$

În general, energia potențială de deformație U_τ este foarte mică în comparație U_σ, cauză pentru care, de regulă, nu este luată în considerare iar relația (6.80) poate fi folosită și în cazul încovoierii simple.

6.8. Aplicații

6.8.1. Probleme static determinate

Aplicația 6.1. Pentru grinda din figura 6.26 se cere:
a) trasarea diagramelor de forțe tăietoare și momente încovoietoare;
b) dimensionarea grinzii de secțiune circulară, constantă pe toată lungimea;
c) dimensionarea grinzii din tronsoane de secțiune circulară;
d) săgeata și rotirea secțiunii de la mijlocul grinzii.
Se cunosc: F = 20 kN; l = 0,3 m; σ_a = 150 MPa; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa.

Rezolvare

a) Din ecuațiile de echilibru rezultă reacțiunile:

$V_A\cdot 3l + Fl - 4F\cdot 2l + F\cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 2F;$

$V_B\cdot 3l + F\cdot 2l - 4F\cdot l - Fl = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = F.$

Eforturile din cele trei regiuni ale grinzii sunt:

- regiunea AC; $x_1 \in (0,l)$;

$T(x_1) = V_A = 2F;$

$M_i(x_1) = V_A\cdot x_1 = 2F\cdot x_1;$ $\quad M_i(0) = 0,\ M_i(l) = 2Fl;$

- regiunea CD; $x_2 \in (0,l)$;

$T(x_2) = -V_B - F = -2F;$

$M_i(x_2) = V_B\cdot(l + x_2) + F\cdot x_2 = Fl + 2Fx_2;$ $\quad M_i(0) = Fl,\ M_i(l) = 3Fl;$

- regiunea BD; $x_3 \in (0,l)$;

$T(x_3) = -V_B = -F;$

$M_i(x_3) = V_B\cdot x_3 = F\cdot x_3;$ $\quad M_i(0) = 0,\ M_i(l) = Fl.$

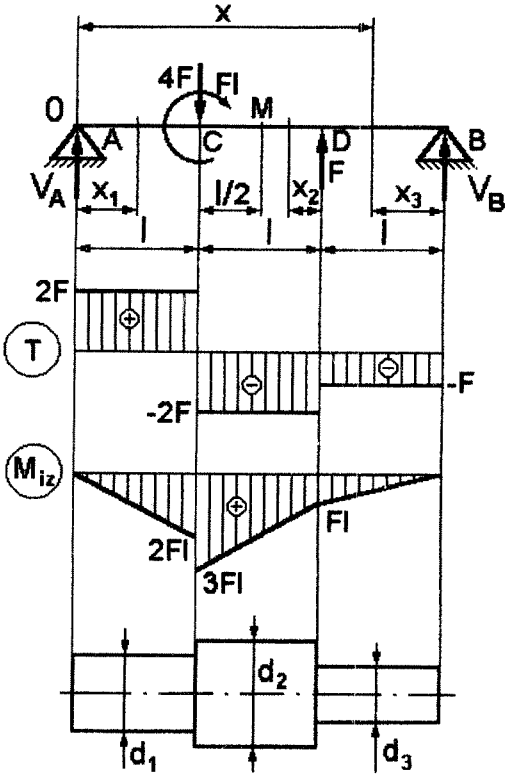


Fig.6.26

b) Condiţia de rezistenţă a grinzii de secţiune constantă este:

$$\sigma_a = \sigma_{max} = \frac{M_{imax}}{W_z} = \frac{3Fl}{\frac{\pi d^3}{32}} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{96Fl}{\pi\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{96 \cdot 20000 \cdot 300}{\pi \cdot 150}} = 106{,}9 \approx 107mm$$

c)Se impune condiţia de rezistenţă pe fiecare regiune, rezultând diametrele tronsoanelor:

$$\sigma_a = \sigma_{max}(x_1) = \frac{M_{imax}(x_1)}{W_z(x_1)} = \frac{2Fl}{\frac{\pi d_1^3}{32}} \Rightarrow d_1 = \sqrt[3]{\frac{64Fl}{\pi\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 20000 \cdot 300}{\pi \cdot 150}} = 93{,}4 \approx 94mm$$

$$d_2 = 107\,mm$$

$$\sigma_a = \sigma_{max}(x_3) = \frac{M_{imax}(x_3)}{W_z(x_3)} = \frac{Fl}{\frac{\pi d_3^3}{32}} \Rightarrow d_3 = \sqrt[3]{\frac{32Fl}{\pi\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 20000 \cdot 300}{\pi \cdot 150}} = 74{,}1 \approx 75mm$$

d) *Calculul deplasărilor pentru grinda de secţiune constantă*

Metoda Clebsch

Considerând originea lui x în punctul A, momentul încovoietor în ultima regiune de pe grindă este:

$$M_i(x) = 2F \cdot x - 4F \cdot (x-l) + Fl \cdot (x-l)^0 + F \cdot (x-2l).$$

Se scrie ecuaţia diferenţială a axei deformate, care se integrează succesiv de două ori:

$$EI_z \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -2Fx + 4F(x-l) - Fl(x-l)^0 - F(x-2l);$$

$$EI_z\varphi(x) = -Fx^2 + 2F(x-l)^2 - Fl(x-l) - F\frac{(x-2l)^2}{2} + C;$$

$$EI_z v(x) = -F\frac{x^3}{3} + 2F\frac{(x-l)^3}{3} - Fl\frac{(x-l)^2}{2} - F\frac{(x-2l)^3}{6} + Cx + D.$$

Impunând condiţiile de rezemare, se determină constantele C şi D:

- la $x = 0$, $v(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$;

- la $x = 3l$, $v(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{35Fl^2}{18}$.

Relaţiile pentru calculul deplasărilor grinzii sunt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{35Fl^2}{18} - Fx^2 + 2F(x-l)^2 - Fl(x-l) - F\frac{(x-2l)^2}{2}\right];$$

$$v(x) = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{35Fl^2}{18}x - F\frac{x^3}{3} + 2F\frac{(x-l)^3}{3} - Fl\frac{(x-l)^2}{2} - F\frac{(x-2l)^3}{6}\right]$$

Deplasările secţiunii transversale din punctul M, se calculează cu $x = 3l/2$, păstrând numai termenii corespunzători din relaţiile de mai sus:

$$\varphi\left(\frac{3l}{2}\right) = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{35Fl^2}{18} - F\left(\frac{3l}{2}\right)^2 + 2F\left(\frac{l}{2}\right)^2 - Fl\frac{l}{2}\right] = -\frac{11}{36}\frac{Fl^2}{EI_z} =$$

$$= -\frac{11}{36}\frac{20000 \cdot 300^2 \cdot 64}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 107^4} = -0{,}0004 \text{ rad} = -0{,}023^\circ;$$

$$v\left(\frac{3l}{2}\right)=\frac{1}{EI_z}\left[\frac{35Fl^2}{18}\frac{3l}{2}-\frac{F}{3}\left(\frac{3l}{2}\right)^3+\frac{2F}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3-\frac{Fl}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]=\frac{7}{4}\frac{Fl^3}{EI_z}=$$

$$=\frac{7}{4}\frac{20000\cdot 300^3\cdot 64}{2{,}1\cdot 10^5\cdot\pi\cdot 107^4}=0{,}7\text{ mm}.$$

Metoda grafo-analitică

Considerând originea lui x tot în A, se pun condițiile pentru determinarea deplasărilor din origine:

- la $x=0$, $v(x)=0 \quad\Rightarrow\quad v_0=0$;

- la $x=l$, $v(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi_0=\dfrac{S_{0,3l}}{3lEI_z}$.

unde $S_{0,3l}$ este momentul static al suprafeței diagramei de momente încovoietoare, calculat față de punctul B,

$$S_{0,3l}=\frac{1\cdot 2Fl}{2}\left(\frac{1}{3}+2l\right)+1\cdot Fl\left(\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1\cdot 2Fl}{2}\left(\frac{2l}{3}+1\right)+\frac{1\cdot Fl}{2}\frac{2l}{3}=\frac{35}{6}Fl^3.$$

Rezultă

$$\varphi_0=\frac{35}{18}\frac{Fl^2}{EI_z}.$$

Relațiile pentru calculul deplasărilor grinzii prin metoda grafo-analitică sunt:

$$\varphi(x)=\frac{35}{18}\frac{Fl^2}{EI_z}-\frac{A_{0x}}{EI_z};$$

$$v(x)=\frac{35}{18}\frac{Fl^2}{EI_z}x-\frac{S_{0x}}{EI_z}.$$

Deplasările secțiunii transversale de la mijlocul grinzii se calculează cu relațiile de mai sus, pentru $x=3l/2$:

$$\varphi\left(\frac{3l}{2}\right)=\frac{35}{18}\frac{Fl^2}{EI_z}-\frac{A_{0,\frac{3l}{2}}}{EI_z}=\frac{35}{18}\frac{Fl^2}{EI_z}-\frac{\frac{1\cdot 2Fl}{2}+\frac{(3Fl+2Fl)}{2}\frac{1}{2}}{EI_z}=-\frac{11}{36}\frac{Fl^2}{EI_z};$$

$$v\left(\frac{3l}{2}\right)=\frac{35}{18}\frac{Fl^2}{EI_z}\frac{3l}{2}-\frac{S_{0,\frac{3l}{2}}}{EI_z}=$$

$$=\frac{35}{18}\frac{Fl^2}{EI_z}\frac{3l}{2}-\frac{\frac{1\cdot 2Fl}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}2Fl\frac{1}{4}+\frac{1}{2}Fl\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{2}}{EI_z}=\frac{7}{4}\frac{Fl^3}{EI_z}$$

Se constată că şi prin cea de-a doua metodă folosită, s-au obţinut aceleaşi deplasări.

Calculul deplasărilor pentru grinda din tronsoane

Metoda grafo-analitică

Considerând originea lui x tot în A, se pun condiţiile pentru determinarea deplasărilor din origine:

- la $x = 0$, $v(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = 0$;
- la $x = l$, $v(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\varphi_0=\frac{1}{3l}\left(\frac{S_{AC,3l}}{EI_{1z}}+\frac{S_{CD,3l}}{EI_{2z}}+\frac{S_{DB,3l}}{EI_{3z}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3lE}\left[\frac{\frac{1\cdot 2Fl}{2}\left(\frac{1}{3}+2l\right)}{\frac{\pi d_1^4}{64}}+\frac{1\cdot Fl\left(\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1\cdot 2Fl}{2}\left(\frac{2l}{3}+1\right)}{\frac{\pi d_2^4}{64}}+\frac{\frac{1\cdot Fl}{2}\frac{2l}{3}}{\frac{\pi d_3^4}{64}}\right]=$$

$$=\frac{64Fl^2}{9\pi E}\left(\frac{7}{d_1^4}+\frac{19}{2d_2^4}+\frac{1}{d_3^4}\right)=\frac{64\cdot 20000\cdot 300^2}{9\cdot\pi\cdot 2{,}1\cdot 10^5}\left(\frac{7}{94^4}+\frac{19}{2\cdot 107^4}+\frac{1}{75^4}\right)=0{,}00376\text{rad}$$

Pentru secţiunea de la mijlocul grinzii deplasările sunt:

$$\varphi\left(\frac{3l}{2}\right)=\varphi_0-\frac{A_{0,l}}{EI_{1z}}-\frac{A_{l,\frac{3l}{2}}}{EI_{2z}}=\varphi_0-\frac{\frac{1\cdot 2Fl}{2}}{E\frac{\pi d_1^4}{64}}-\frac{\frac{3Fl+2Fl}{2}\frac{l}{2}}{E\frac{\pi d_2^4}{64}}=$$

$$=\varphi_0-\frac{64Fl^2}{\pi E}\left(\frac{1}{d_1^4}+\frac{5}{4d_2^4}\right)=0{,}00376-\frac{64\cdot 20000\cdot 300^2}{\pi\cdot 2{,}1\cdot 10^5}\left(\frac{1}{94^4}+\frac{5}{4\cdot 107^4}\right)=$$

$$=-0{,}00014\text{ rad}=-0{,}008^\circ$$

$$v\left(\frac{3l}{2}\right)=\varphi_0\cdot\frac{3l}{2}-\frac{S_{AC,\frac{3l}{2}}}{EI_{1z}}-\frac{S_{CM,\frac{3l}{2}}}{EI_{2z}}=$$

$$=\varphi_0\cdot\frac{3l}{2}-\frac{\frac{1\cdot 2Fl}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}{E\frac{\pi d_1^4}{64}}-\frac{\frac{1}{2}2Fl\frac{1}{4}+\frac{1}{2}Fl\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{2}}{E\frac{\pi d_2^4}{64}}=\varphi_0\cdot\frac{3l}{2}-\frac{64Fl^3}{3\pi E}\left(\frac{5}{2d_1^4}+\frac{1}{d_2^4}\right)=$$

$$=0{,}00376\cdot\frac{3\cdot 300}{2}-\frac{64\cdot 20000\cdot 300^3}{3\pi\cdot 2{,}1\cdot 10^5}\left(\frac{5}{2\cdot 94^4}+\frac{1}{107^4}\right)=0{,}999\ \text{mm}$$

Aplicaţia 6.2. Pentru bara din figura 6.27 se cere:
a) trasarea diagramelor de eforturi;
b) dimensionarea grinzii de secţiune dreptunghiulară constantă pe toată lungimea, dacă *h/b* = 2;
c) calculul tensiunilor şi direcţiilor principale în puntul *P* din secţiunea *S*.
Se cunosc: q = 10 kN/m; l = 0,2m; σ_a = 120 MPa.
Rezolvare
a) Din ecuaţiile de echilibru rezultă reacţiunile:

$$ql\cdot\frac{7l}{2}-V_A\cdot 3l-ql^2+4ql\cdot 2l-\frac{ql}{2}\cdot\frac{1}{3}=0\Rightarrow V_A=\frac{31}{9}ql;$$

$$ql\cdot\frac{1}{2}-ql^2-4ql\cdot l+V_B\cdot 3l-\frac{ql}{2}\cdot\frac{10l}{3}=0\Rightarrow V_B=\frac{37}{18}ql.$$

Expresiile forţelor tăietoare şi ale momentelor încovoietoare în cele patru regiuni ale grinzii sunt:

- regiunea CA; $x_1\in(o,l)$

$$T(x_1)=-qx_1;\quad T(0)=0,\ T(l)=-ql;$$

$$M_i(x_1)=-\frac{qx_1^2}{2};\quad M_i(0)=0,\ M_i(l)=-\frac{ql^2}{2};$$

$$M_i'(x_1)=-qx_1=0\ \Rightarrow\ x_1=0;$$

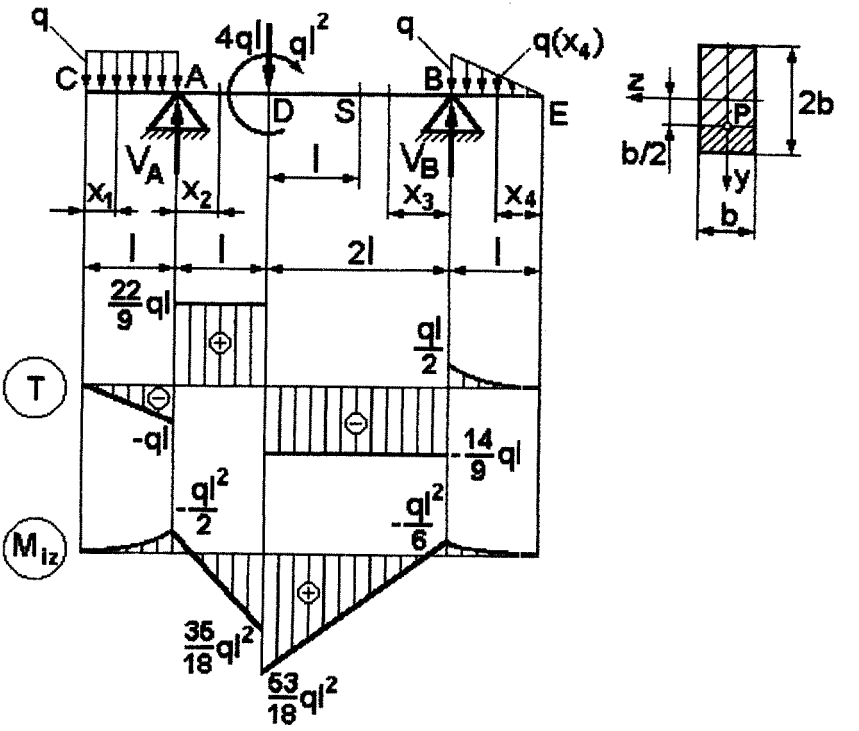


Fig.6.27

- regiunea AD; $x_2 \in (o,l)$

$$T(x_2) = -ql + \frac{31}{9}ql = \frac{22}{9}ql;$$

$$M_i(x_2) = -ql\left(\frac{l}{2} + x_2\right) + \frac{31}{9}qlx_2; \quad M_i(0) = -\frac{ql^2}{2}, M_i(l) = \frac{35}{18}ql^2$$

- regiunea BD; $x_3 \in (o,2l)$

$$T(x_3) = \frac{ql}{2} - \frac{37}{18}ql = -\frac{14}{9}ql;$$

$$M_i(x_3) = -\frac{ql}{2}\left(\frac{l}{3} + x_3\right) + \frac{37}{18}qlx_3; \quad M_i(0) = -\frac{ql^2}{6}, M_i(2l) = \frac{53}{18}ql^2$$

- regiunea BE; $x_4 \in (o,l)$

$$T(x_4) = \frac{q(x_4)\cdot x_4}{2} = \frac{qx_4^2}{2l};\quad T(0) = 0,\ T(l) = \frac{ql}{2};$$

$$T'(x_4) = \frac{qx_4}{l} = 0 \ \Rightarrow\ x_4 = 0;$$

$$M_i(x_4) = -\frac{q(x_4)\cdot x_4}{2}\frac{x_4}{3} = -\frac{qx_4^3}{6l};\quad M_i(0) = 0,\ M_i(l) = -\frac{ql^2}{6};$$

$$M_i'(x_4) = -\frac{qx_4^2}{2l} = 0 \ \Rightarrow\ x_4 = 0.$$

b) Condiţia de rezistenţă a grinzii de secţiune constantă este:

$$\sigma_a = \sigma_{max} = \frac{M_{imax}}{W_z} = \frac{\frac{53}{18}ql^2}{\frac{b(2b)^2}{6}} = \frac{53}{12}\frac{ql^2}{b^3} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{53ql^2}{12\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{53\cdot 10\cdot 200^2}{12\cdot 120}} = 24{,}5 \approx 25\text{mm}$$

Dimensiunile secţiunii sunt deci: $b = 25$ mm; $h = 50$ mm.

c) În secţiunea S ($x_3 = l$), eforturile sunt:

- forţa tăietoare, $T = -\frac{14}{9}ql;$

- momentul încovoietor, $M_i = \frac{25}{18}ql^2.$

Tensiunile în punctul P ($z = 0$, $y = b/2$), din secţiunea S sunt:

- tensiunea tangenţială

$$\tau_{xy} = \frac{T\cdot S_z(y)}{b(y)\cdot I_z} = \frac{\left(-\frac{14}{9}ql\right)\cdot b\cdot\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{4}\right)}{b\cdot\frac{b(2b)^3}{12}} = -\frac{7}{8}\frac{ql}{b^2} = \frac{7}{8}\frac{10\cdot 200}{25^2} = -2{,}8\text{MPa}$$

- tensiunea normală

$$\sigma_x = \frac{M_i\cdot y}{I_z} = \frac{\frac{25}{18}ql^2\cdot\frac{b}{2}}{\frac{b(2b)^3}{12}} = \frac{25}{24}\frac{ql^2}{b^3} = \frac{25}{24}\frac{10\cdot 200^2}{25^3} = 26{,}7\text{MPa}.$$

Tensiunile principale sunt:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{26,7}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{26,7^2 + 4\cdot(-2,8)^2} = 13,35 \pm 13,64 \text{MPa}$$

$\sigma_1 = 26,99$ MPa (întindere);

$\sigma_2 = -0,29$ MPa (compresiune).

Direcţiile principale sunt:

$$\text{tg}2\alpha_{1,2} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} = -\frac{2\cdot(-2,8)}{26,7} = 0,209;$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\text{arctg}\ 0,209 = 5,92°;$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1 = 90° + 5,92° = 95,92°.$$

6.8.2. Probleme static nedeterminate

La solicitarea de încovoiere simplă a unei grinzi continue, nedeterminarea apare dacă pentru rezemare se folosesc:

- mai mult de două reazeme simple;
- mai mult de un reazem simplu şi unul articulat;
- mai mult de o încastrare.

Pentru determinarea tuturor reacţiunilor unui sistem static nedeterminat, ecuaţiile de echilibru se completează cu ecuaţii bazate pe analiza modului de deformare a sistemului elastic. Aceste ecuaţii se referă la mărimea deplasărilor din reazeme, care cel mai adesea sunt nule. La scrierea efectivă a acestor ecuaţii poate fi folosită oricare dintre metodele pentru calcul deplasărilor expuse în paragraful 6.6.

Pentru grinzile drepte continue rezemate pe mai mult de două reazeme simple, există şi o altă metodă de ridicare a nedeterminării bazată pe *ecuaţia celor trei momente*.

Ecuaţia celor trei momente

Se consideră o grindă dreaptă continuă, rezemată pe n rezeme şi încărcată cu o sarcină oarecare (fig. 6.28).

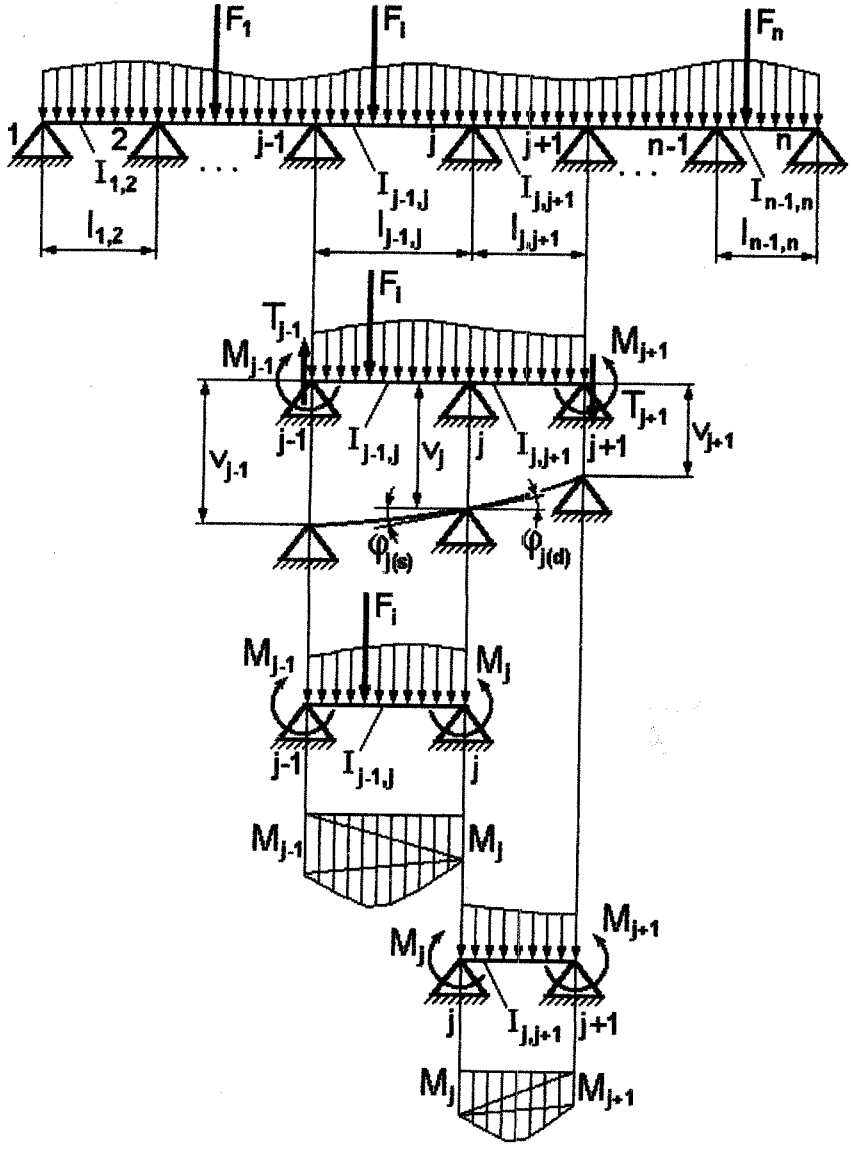


Fig. 6.28

Cu excepţia reazemelor de la capete, în secţiunile din dreptul tuturor celorlalte reazeme există momente încovoietoare. Dacă se cunosc reacţiunile, atunci valorile acestora se pot calcula cu uşurinţă. Problema poate fi pusă şi invers: dacă se cunosc momentele din dreptul reazemelor, se pot calcula reacţiunile.

În cele ce urmează se va stabili o relaţie care să permită determinarea acestor momente.

Pentru o mai mare generalizare se presupune că:
- momentul de inerţie al secţiunilor transversale este constant pe intervalul dintre reazeme dar diferă de la un interval la altul;
- reazemele sunt tasabile.

Din această grindă se izolează o porţiune care cuprinde trei reazeme succesive, *j-1, j, j+1*. Acţiunile părţilor înlăturate se înlocuiesc cu eforturile din secţiunile făcute: momentele încovoietoare M_{j-1}, M_{j+1} şi forţele tăietoare T_{j-1}, T_{j+1}.

În dreptul reazemului *j* se impune condiţia de continuitate

$$\varphi_{j(s)} = -\varphi_{j(d)}, \tag{6.84}$$

unde $\varphi_{j(s)}$ este rotirea secţiunii transversale din dreptul reazemului *j* pentru porţiunea din stânga reazemului;

$\varphi_{j(d)}$ este rotirea secţiunii transversale din dreptul reazemului *j* pentru porţiunea din dreapta reazemului.

Pentru calculul rotirilor din relaţia (6.84) se foloseşte relaţia (6.79) pentru calculul săgeţilor prin metoda grafo-analitică, care se scrie sub forma:

$$\varphi_0 = \frac{v(x) - v_0}{x} + \frac{S_{0x}}{EI_z \cdot x}. \tag{6.85}$$

Porţiunea izolată se secţionează în dreptul reazemului *j*, obţinându-se două grinzi simplu rezemate, încărcate ce sarcinile exterioare corespunzătoare grinzii iniţiale şi cu eforturile din secţiunile făcute în dreptul reazemelor. Pentru aceste grinzi se trasează diagramele de momente încovoietoare. Deoarece forţele tăietoare acţionează în reazeme, ele nu influenţează diagramele de momente încovoietoare şi de aceea nu se mai figurează.

Pentru calculul rotirilor $\varphi_{j(s)}$ şi $\varphi_{j(d)}$ se aplică relaţia (6.85), în care originea se consideră în reazemul *j*, iar distanţa *x* este, pe rând, lungimea celor două tronsoane: $l_{j-1,j}$ şi respectiv $l_{j,j+1}$.

Cu notaţiile $v_0 = v_j$, $v(l_{j-1,j}) = v_{j-1}$ şi $v(l_{j,j+1}) = v_{j+1}$ se obţine:

$$\varphi_{j(s)} = \frac{v_{j-1} - v_j}{l_{j-1,j}} + \frac{S_{j,l_{j-1}}}{l_{j-1,j} EI_{j-1,j}}; \qquad (6.86)$$

$$\varphi_{j(d)} = \frac{v_{j+1} - v_j}{l_{j,j+1}} + \frac{S_{j,l_{j+1}}}{l_{j,j+1} EI_{j,j+1}}. \qquad (6.87)$$

Momentele statice care intervin în relaţiile (6.86) şi (6.87) sunt

$$S_{j,l_{j-1}} = \frac{M_j \cdot l_{j-1,j}}{2} \cdot \frac{2l_{j-1,j}}{3} + \frac{M_{j-1} \cdot l_{j-1,j}}{2} \cdot \frac{l_{j-1,j}}{3} + S_{j,j-1}; \qquad (6.88)$$

$$S_{j,l_{j+1}} = \frac{M_j \cdot l_{j,j+1}}{2} \cdot \frac{2l_{j,j+1}}{3} + \frac{M_{j+1} \cdot l_{j,j+1}}{2} \cdot \frac{l_{j,j+1}}{3} + S_{j,j+1}; \qquad (6.89)$$

în care ***$S_{j,j-1}$ şi $S_{j,j+1}$ sunt momentele statice ale suprafeţelor diagramelor de momente încovoietoare (trasate pentru grinzile simplu rezemate, încărcate cu sarcinile corespunzătoare grinzii iniţiale) calculate faţă de reazemele j-1 şi respectiv j+1.***

Înlocuind momentele statice $S_{j,j-1}$ şi $S_{j,j+1}$ în relaţiile pentru calculul rotirilor (6.86) şi (6.87), din condiţia de continuitate (6.84) rezultă:

$$M_{j-1}\frac{l_{j-1,j}}{I_{j-1,j}} + 2M_j\left(\frac{l_{j-1,j}}{I_{j-1,j}} + \frac{l_{j,j+1}}{I_{j,j+1}}\right) + M_{j+1}\frac{l_{j,j+1}}{I_{j,j+1}} + 6E\left(\frac{v_{j-1} - v_j}{l_{j-1,j}} + \frac{v_{j+1} - v_j}{l_{j,j+1}}\right) =$$

$$= -\frac{6S_{j,j-1}}{l_{j-1,j} \cdot I_{j-1,j}} - \frac{6S_{j,j+1}}{l_{j,j+1} \cdot I_{j,j+1}} \qquad (6.90)$$

Relaţia de mai sus este cunoscută sub denumirea de ***ecuaţia celor trei momente*** sau ***ecuaţia lui Clapeyron.***

Dacă grinda are acelaşi moment de inerţie pe toată lungimea,

$$I_{1,2} = I_{2,3} = \cdots = I_{j-1,j} = I_{j,j+1} = \cdots = I_{n-1,n} = I_z,$$

atunci ecuaţia celor trei momente devine:

$$M_{j-1}\cdot l_{j-1,j}+2M_j\left(l_{j-1,j}+l_{j,j+1}\right)+M_{j+1}\cdot l_{j,j+1}+6EI_z\left(\frac{v_{j-1}-v_j}{l_{j-1,j}}+\frac{v_{j+1}-v_j}{l_{j,j+1}}\right)=$$

$$=-\frac{6S_{j,j-1}}{l_{j-1,j}}-\frac{6S_{j,j+1}}{l_{j,j+1}}. \qquad (6.91)$$

În cazul reazemelor netasabile, pentru grinda continuă cu momentul de inerţie al secţiunii transversale constant pe toată lungimea, ecuaţia celor trei momente se scrie:

$$M_{j-1}\cdot l_{j-1,j}+2M_j\left(l_{j-1,j}+l_{j,j+1}\right)+M_{j+1}\cdot l_{j,j+1}=-\frac{6S_{j,j-1}}{l_{j-1,j}}-\frac{6S_{j,j+1}}{l_{j,j+1}} \qquad (6.92)$$

Aplicaţia 6.3. Să se determine reacţiunile pentru grinda dreaptă de rigiditate constantă din figura 6.29.

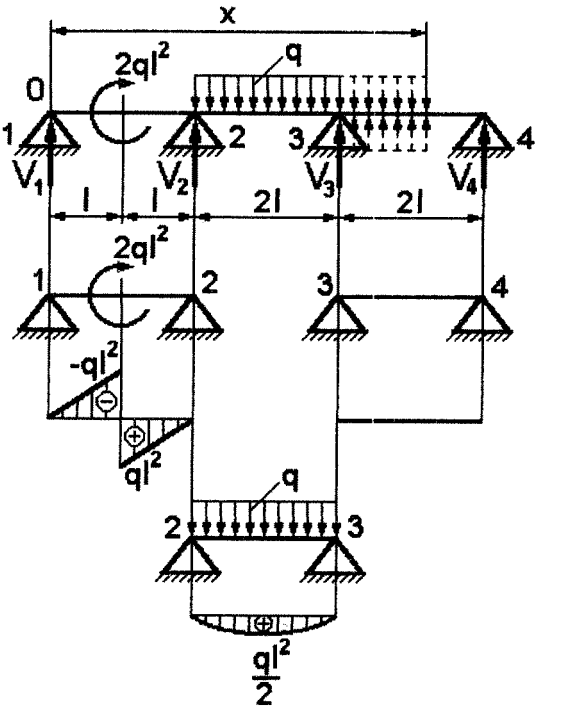


Fig. 6.29

Rezolvare

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$V_1 + V_2 - 2ql + V_3 - V_4 = 0 ;$$

$$2ql^2 - V_2 \cdot 2l + 2ql \cdot 3l - V_3 \cdot 4l - V_4 \cdot 6l = 0 .$$

Problema este dublu static nedeterminată, deoarece sunt patru necunoscute şi se pot scrie numai două ecuaţii de echilibru.

Ecuaţiile suplimentare se scriu din condiţiile de deformaţie.

a) *Metoda Clebsch*

Se alege originea lui x în reazemul *1* şi se scrie expresia momentului încovoietor în ultima regiune de pe grindă:

$$M_{iz}(x) = V_1 x + 2ql^2 (x-l)^0 + V_2 (x-2l) - \frac{q(x-2l)^2}{2} + \frac{q(x-4l)^2}{2} + V_3 (x-4l)$$

Se scrie ecuaţia diferenţială a axei deformate şi se integrează succesiv de două ori:

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -V_1 x - 2ql^2 (x-l)^0 - V_2 (x-2l) + \frac{q(x-2l)^2}{2} - \frac{q(x-4l)^2}{2} - V_3 (x-4l)$$

$$EI_z \varphi(x) = -V_1 \frac{x^2}{2} - 2ql^2 (x-l)^1 - V_2 \frac{(x-2l)^2}{2} + \frac{q(x-2l)^3}{6} - \frac{q(x-4l)^3}{6} - V_3 \frac{(x-4l)^2}{2} + C$$

$$EI_z v(x) = -V_1 \frac{x^3}{6} - ql^2 (x-l)^2 - V_2 \frac{(x-2l)^3}{6} + \frac{q(x-2l)^4}{24} - \frac{q(x-4l)^4}{24} - V_3 \frac{(x-4l)^3}{6} + Cx + D$$

Condiţiile de *rezemare* sunt:

- la $x = 0$, $v(x) = 0$;
- la $x = 2l$, $v(x) = 0$;
- la $x = 4l$, $v(x) = 0$;
- la $x = 6l$, $v(x) = 0$.

Înlocuind aceste condiţii în expresia săgeţii (din care se reţin numai termenii corespunzători), se obţine:

$$D = 0 ;$$

$$-V_1 \frac{(2l)^3}{6} - ql^2 \cdot l^2 + C \cdot 2l = 0 ;$$

$$-V_1 \frac{(4l)^3}{6} - ql^2 (3l)^2 - V_2 \frac{(2l)^3}{6} + \frac{q(2l)^4}{24} + C \cdot 4l = 0 ;$$

$$-V_1 \frac{(6l)^3}{6} - ql^2 (5l)^2 - V_2 \frac{(4l)^3}{6} + \frac{q(4l)^4}{24} - \frac{q(2l)^4}{24} - V_3 \frac{(2l)^3}{6} + C \cdot 6l = 0$$

Aceste patru ecuaţii împreună cu cele două ecuaţii de echilibru, formează un sistem care permite determinarea reacţiunilor V_1, V_2, V_3, V_4 şi a constantelor C şi D.

Rezolvând sistemul, se obţine:

$$V_1 = -\frac{7}{6}ql;\ V_2 = \frac{9}{4}ql;\ V_3 = ql;\ V_4 = -\frac{1}{12}ql;\ C = -\frac{5}{18}ql^3;\ D = 0.$$

b) *Metoda bazată pe ecuaţia celor trei momente*

Deoarece problema este dublu static nedeterminată, se scrie de două ori ecuaţia celor trei momente, pentru succesiunea de reazeme 1-2-3 şi respectiv 2-3-4:

$$M_1 \cdot 2l + 2M_2(2l + 2l) + M_3 \cdot 2l = -\frac{6S_{21}}{2l} - \frac{6S_{23}}{2l};$$

$$M_2 \cdot 2l + 2M_3(2l + 2l) + M_4 \cdot 2l = -\frac{6S_{32}}{2l} - \frac{6S_{34}}{2l};$$

în care,

$$M_1 = 0;\quad M_4 = 0;\quad S_{34} = 0;$$

$$S_{21} = \frac{l(-ql^2)}{2}\frac{2l}{3} + \frac{l \cdot ql^2}{2}\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{ql^4}{3};$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{2}{3} \cdot 2l \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l = \frac{2ql^4}{3}.$$

momentele statice fiind calculate pe baza diagramelor prezentate în figura 6.29.

Rezolvând sistemul se obţine:

$$M_2 = -\frac{ql^2}{3};\quad M_3 = -\frac{ql^2}{6}.$$

Pentru determinarea reacţiunilor se scriu expresiile momentelor încovoietoare în secţiunile din dreptul reazemelor 2 şi respectiv 3 considerând sarcinile din stânga sau din dreapta:

$$V_1 \cdot 2l + 2ql^2 = M_2 = -\frac{ql^2}{3} \Rightarrow V_1 = -\frac{7}{6}ql;$$

$$V_4 \cdot 2l = M_3 = -\frac{ql^2}{6} \Rightarrow V_4 = -\frac{ql}{12};$$

$$-\frac{7}{6}ql\cdot 4l+2ql^2+V_2\cdot 2l-2ql\cdot l=M_3=-\frac{ql^2}{6}\ \Rightarrow\ V_2=\frac{9}{4}ql;$$

$$-\frac{ql}{12}\cdot 4l+V_3\cdot 2l-2ql\cdot l=M_2=-\frac{ql^2}{3}\ \Rightarrow\ V_3=ql.$$

Aplicaţia 6.4. Să se determine reacţiunile pentru grinda dreaptă de rigiditate constantă din figura 6.30.

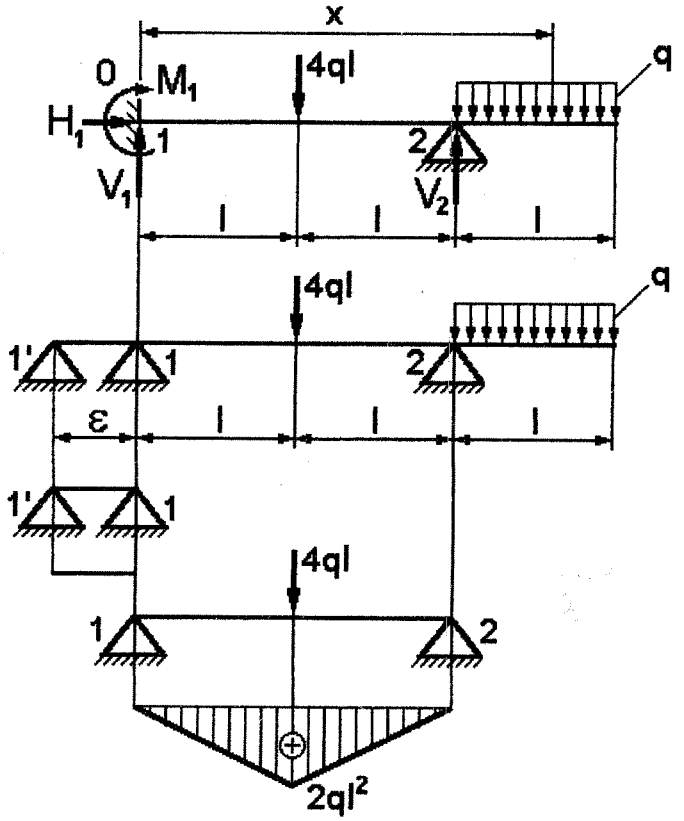


Fig. 6.30

Rezolvare

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$H_1 = 0;$

$V_1 - 4ql + V_2 - ql = 0;$

$M_1 + 4ql\cdot l - V_2\cdot 2l + ql\cdot 5l/2 = 0.$

Problema este simplu static nedeterminată deoarece sunt patru necunoscute şi numai trei ecuaţii de echilibru.

Pentru ridicarea nedeterminării se scrie o ecuaţie suplimentară din condiţiile de deformaţie.

a) *Metoda Clebsch*

Se alege originea lui x în reazemul *1* şi se scrie expresia momentului încovoietor în ultima regiune de pe grindă:

$$M_{iz}(x) = M_1 + V_1 x - 4ql(x-l) + V_2(x-2l) - \frac{q(x-2l)^2}{2}.$$

Se scrie ecuaţia diferenţială a axei deformate şi se integrează succesiv de două ori:

$$EI_z \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -M_1 - V_1 x + 4ql(x-l) - V_2(x-2l) + \frac{q(x-2l)^2}{2};$$

$$EI_z\varphi(x) = -M_1 x - V_1\frac{x^2}{2} + 2ql(x-l)^2 - V_2\frac{(x-2l)^2}{2} + \frac{q(x-2l)^3}{6} + C;$$

$$EI_z v(x) = -M_1\frac{x^2}{2} - V_1\frac{x^3}{6} + 2ql\frac{(x-l)^3}{3} - V_2\frac{(x-2l)^3}{6} + \frac{q(x-2l)^4}{24} + Cx + D$$

Condiţiile de *rezemare* sunt:

- la $x = 0$, $\varphi(x) = 0$;
- la $x = 0$, $v(x) = 0$;
- la $x = 2l$, $v(x) = 0$.

Înlocuind aceste condiţii în expresia săgeţii (din care se reţin numai termenii corespunzători) se rezultă:

$$C = 0;$$

$$D = 0;$$

$$-M_1\frac{(2l)^2}{2} - V_1\frac{(2l)^3}{6} + 2ql\frac{l^3}{3} = 0.$$

Sistemul format de ultima ecuaţie împreună cu cele trei ecuaţii de echilibru, permite determinarea reacţiunilor M_1, V_1, V_2 şi H_1. Rezolvând acest sistem se obţine:

$$M_1 = -\frac{5}{4}ql^2; \quad V_1 = \frac{19}{8}ql; \quad V_2 = \frac{21}{8}ql; \quad H_1 = 0.$$

b) *Metoda bazată pe ecuaţia celor trei momente*

Pentru a putea aplica ecuaţia celor trei momente, reazemul încastrat se înlocuieşte cu două reazeme simple aflate la distanţa infinit mică $\varepsilon \to 0$.
Ecuaţia lui Clapeyron pentru succesiunea de reazeme 1'-1-2 este:

$$M_{1'} \cdot \varepsilon + 2M_1(\varepsilon + 2l) + M_2 \cdot 2l = -\frac{6S_{11'}}{\varepsilon} - \frac{6S_{12}}{2l},$$

în care,

$$M_{1'} = 0; \quad M_2 = -\frac{ql^2}{2}; \quad S_{11'} = 0; \quad S_{12} = \frac{2l \cdot 2ql^2}{2} \cdot l = 2ql^4,$$

momentele statice fiind calculate pe baza diagramelor prezentate în figura 6.30.
Rezolvând ecuaţia de mai sus, se obţine reacţiunea:

$$M_1 = -\frac{5}{4}ql^2.$$

Celelalte reacţiuni se determină din ecuaţiile de echilibru:

$$V_1 = \frac{19}{8}ql; \quad V_2 = \frac{21}{8}ql; \quad H_1 = 0.$$

După ridicarea nedeterminării, calculele de dimensionare sau de verificare se efectuează la fel ca în cazul problemelor static determinate.

7. STABILITATEA BARELOR DREPTE SOLICITATE LA COMPRESIUNE

7.1. Echilibru elastic, stabilitate şi instabilitate

Într-un sistem solicitat elastic, echilibrul între sarcinile exterioare şi forţele interioare generate de acestea, poate fi stabil sau instabil.

Un echilibru elastic este *stabil*, dacă după orice perturbare exterioară a stării de echilibru, corpul are tendinţa de a reveni la starea iniţială de echilibru.

Echilibrul elastic este *instabil*, dacă în urma modificării echilibrului sub acţiunea unor sarcini exterioare perturbatoare, corpul continuă să se deformeze în sensul perturbaţiei imprimate şi nu mai revine în starea iniţială de echilibru după încetarea acţiunii perturbatoare.

Între aceste două stări de echilibru, există o stare tranzitorie numită *critică*. Dacă un corp solicitat elastic se găseşte în starea critică, atunci el este în echilibru indiferent: el poate la fel de bine să-şi păstreze starea iniţială de echilibru, cum la fel de bine poate să şi-o piardă, la o perturbaţie exterioară oricât de mică.

Stabilitatea formei unui corp aflat în echilibru elastic depinde de mărimea sarcinii exterioare aplicate. Se numeşte *sarcină critică*, notată F_{cr}, sarcina care odată aplicată, provoacă pierderea stabilităţii formei iniţiale de echilibru a corpului.

În figura 7.1 se arată cazurile posibile în care poate să se găsească o bară dreaptă solicitată la compresiune:

- pentru $F < F_{cr}$ forma de echilibru a barei este stabilă (fig. 7.1a); dacă se aplică o forţă perturbatoare transversală care produce o încovoiere, după înlăturarea acesteia, bara revine la forma dreaptă de echilibru;

- pentru $F = F_{cr}$ bara se află în echilibru indiferent şi poate lua una din cele trei forme prezentate în figura 7.1b; dacă se aplică o forţă perturbatoare oricât de mică, bara părăseşte complet poziţia de echilibru, adică se încovoaie fără posibilitatea de a reveni la forma dreaptă;

- pentru $F > F_{cr}$ bara îşi pierde stabilitatea şi se încovoaie, adică forma barei încetează să mai fie dreaptă.

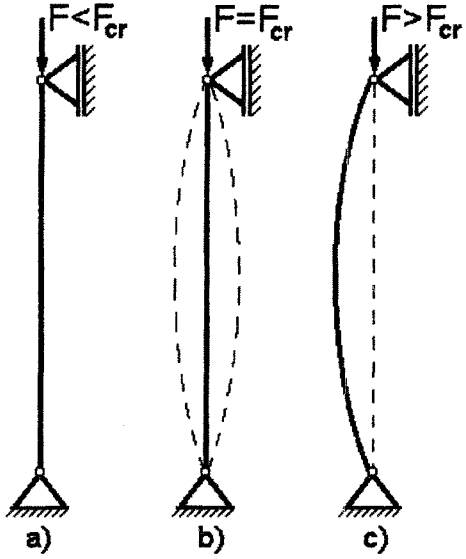


Fig. 7.1

Fenomenul de trecere a unei piese din starea de echilibru stabil în cea de echilibru instabil, la o anumită valoare (critică) a sarcinilor aplicate poartă numele de ***flambaj****.*

Caracterul periculos al flambajului decurge din faptul că pierderea stabilităţii intervine brusc, fără a fi precedată de fenomene care să indice apropierea de sarcina critică. De aceea în toate cazurile în care este posibilă pierderea stabilităţii elastice se face un calcul la stabilitate, luându-se drept sarcină de lucru o sarcină cu mult mai mică decât cea critică.

Raportul dintre sarcina critică de flambaj şi sarcina nominală se numeşte *coeficient de siguranţă la flambaj*:

$$c = \frac{F_{cr}}{F} \tag{7.1}$$

Condiţia de stabilitate este

$$c_{ef} \geq c \tag{7.2}$$

unde c_{ef} este coeficientul de siguranţă efectiv;

c - coeficientul de siguranţă impus.

Valorile coeficientului de siguranţă c, variază foarte mult ($c = 2 \div 28$), în funcţie de importanţa piesei şi a ansamblului din care face parte.

7.2. Forţa critică de flambaj pentru bara dreaptă solicitată la compresiune

În continuare se determină forţa critică de flambaj pentru patru moduri de rezemare ale barei de secţiune constantă. Sub acţiunea acestei forţe bara îşi pierde stabilitatea elastică şi devine curbă. Curbarea (încovoierea) se produce întotdeauna după direcţia faţă de care momentul de inerţie al secţiunii transversale este minim. Se presupune că sub acţiunea acestei forţe tensiunile din bară nu depăşesc limita de proporţionalitate.

7.2.1. Bara articulată la ambele capete

Se consideră bara din figura 7.2 articulată la ambele capete, de rigiditate constantă la încovoiere, comprimată cu forţa critică de flambaj F_{cr}.

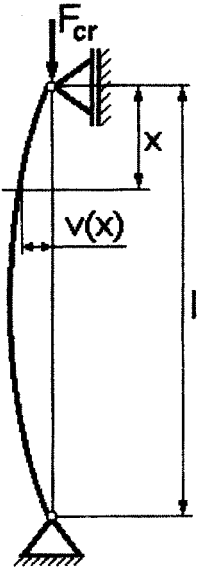


Fig. 7.2.

Într-o secţiune oarecare, la distanţa x de unul din capetele barei, unde săgeata este $v(x)$, forţa F_{cr} produce momentul încovoietor:

$$M_i(x) = F_{cr} \cdot v(x). \qquad (7.3)$$

Ecuaţia diferenţială a axei deformate devine:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M_i(x)}{EI_{min}} = -\frac{F_{cr} \cdot v(x)}{EI_{min}}. \qquad (7.4)$$

Notând

$$\alpha^2 = \frac{F_{cr}}{EI_{min}}, \qquad (7.5)$$

ecuaţia (7.4) se scrie sub forma:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot v(x) = 0. \qquad (7.6)$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este de forma:

$$v(x) = A \sin\alpha x + B \cos\alpha x . \qquad (7.7)$$

Din condiţiile de *rezemare* rezultă:

- la $x = 0$, $v(x) = 0$; $\Rightarrow$ $B = 0$;
- la $x = l$, $v(x) = 0$ $\Rightarrow$ $A \sin\alpha l = 0$.

Se observă că $A \neq 0$, deoarece altfel săgeata $v(x)$ ar fi egală cu zero şi deci ultima condiţie este satisfăcută dacă:

$$\sin \alpha l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha l = 0, \pi, 2\pi, \ldots k\pi. \qquad (7.8)$$

Cum $\alpha l \neq 0$ (deoarece $\alpha \neq 0$ şi $l \neq 0$), rezultă că prima soluţie este

$$\alpha l = \pi.$$

Ridicând la pătrat şi ţinând seama de notaţia (7.5), se obţine:

$$\boxed{F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}} \qquad (7.9)$$

Relaţia (7.9) este *formula lui Euler* pentru cazul fundamental de flambaj.

Pentru $k \geq 2$, forţele critice au valori mult mai mari,

$$F_{cr,k} = k^2 \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} = k^2 F_{cr}, \qquad (7.10)$$

care nu prezintă interes pentru cazul analizat, bara pierzându-şi stabilitatea la cea mai mică valoare a forţei critice.

Ecuaţia axei deformate a barei după pierderea stabilităţii elastice este

$$v(x) = A \sin\frac{\pi x}{l}, \qquad (7.11)$$

şi reprezintă o sinusoidă cu semiunda de lungime l.

Constanta A nu poate fi determinată din condiţiile la limită. Semnificaţia ei fizică reiese făcând $x = l/2$ în relaţia (7.11):

$$v_{max} = A,$$

adică ea reprezintă săgeata maximă a barei după pierderea stabilităţii. Mărimea ei rămâne nedeterminată deoarece în calculele prezentate s-a utilizat ecuaţia diferenţială aproximativă a axei deformate.

7.2.2. Bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt

Se consideră bara de rigiditate constantă la încovoiere din figura 7.3, comprimată cu forţa critică de flambaj F_{cr}. Originea axelor este aleasă la capătul liber al barei, fiind ataşată acestuia (adică mobilă odată cu capătul liber).

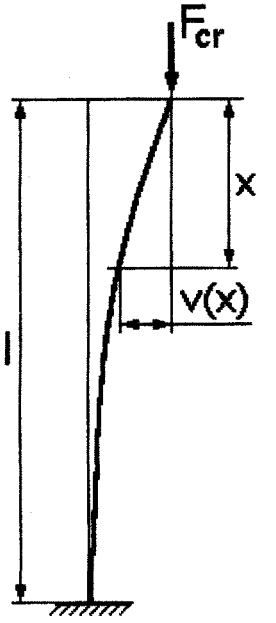


Fig. 7.3.

Într-o secţiune oarecare, la distanţa x de căpătul liber al barei, unde săgeata este $v(x)$, forţa F_{cr} produce momentul încovoietor

$$M_i(x) = F_{cr} \cdot v(x). \qquad (7.12)$$

Ecuaţia diferenţială a axei deformate devine:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M_i(x)}{EI_{min}} = -\frac{F_{cr} \cdot v(x)}{EI_{min}}. \qquad (7.13)$$

Notând

$$\alpha^2 = \frac{F_{cr}}{EI_{min}}, \qquad (7.14)$$

ecuaţia (7.13) se scrie sub forma:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot v(x) = 0. \qquad (7.15)$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este de forma

$$v(x) = A \sin\alpha x + B \cos\alpha x, \qquad (7.16)$$

iar derivata ei este

$$\frac{dv(x)}{dx} = \alpha A \cos\alpha x - \alpha B \sin\alpha x. \qquad (7.17)$$

Din condiţiile de *rezemare* rezultă:

- la $x = 0$, $v(x) = 0$; $\Rightarrow$ $B = 0$;
- la $x = l$, $\frac{dv(x)}{dx} = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha A \cos\alpha l = 0$.

Se observă că $A \neq 0$, deoarece altfel săgeata $v(x)$ ar fi egală cu zero, iar $\alpha \neq 0$, deoarece în caz contrar rezultă $F_{cr} = 0$ şi deci ultima condiţie este satisfăcută dacă

$$\cos\alpha l = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \cdots \quad \frac{(2k+1)\pi}{2}. \tag{7.18}$$

Din prima soluţie rezultă

$$\alpha = \frac{\pi}{2l},$$

care prin ridicare la pătrat şi înlocuire în relaţia (7.14) conduce la obţinerea valorii minime a forţei critice de flambaj:

$$\boxed{F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2}} \tag{7.19}$$

Pentru $k \geq 1$, forţele critice au valori mult mai mari,

$$F_{cr,k} = (2k+1)^2 \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2} = (2k+1)^2 F_{cr}, \tag{7.20}$$

care nu prezintă interes pentru cazul de rezemare considerat, bara pierzându-şi stabilitatea la cea mai mică valoare a forţei critice.

Ecuaţia axei deformate a barei după pierderea stabilităţii elastice este

$$v(x) = A \sin\frac{\pi x}{2l} \tag{7.21}$$

şi reprezintă o sinusoidă cu lungimea semiundei, $2l$.

7.2.3. Bara încastrată la un capăt şi articulată la celălalt

Se consideră bara de rigiditate constantă la încovoiere din figura 7.4, comprimată cu forţa critică de flambaj F_{cr}.

Într-o secţiune oarecare, la distanţa x de căpătul liber al barei, unde săgeata este $v(x)$, forţa F_{cr} produce momentul încovoietor

$$M_i(x) = F_{cr} \cdot v(x) - Hx. \tag{7.22}$$

Ecuaţia diferenţială a axei deformate devine:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M_i(x)}{EI_{min}} = -\frac{F_{cr}\cdot v(x)}{EI_{min}} + \frac{Hx}{EI_{min}}. \qquad (7.23)$$

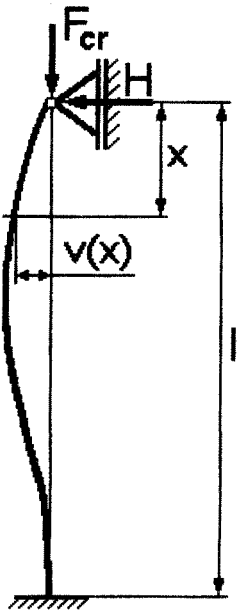


Fig. 7.4

Notând

$$\alpha^2 = \frac{F_{cr}}{EI_{min}} \text{ şi } \beta = \frac{H}{EI_{min}}; \qquad (7.24)$$

ecuaţia (7.23) se scrie sub forma:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot v(x) = \beta x. \qquad (7.25)$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este de forma

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x), \qquad (7.26)$$

unde

$$v_1(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x \qquad (7.27)$$

este soluţia generală a ecuaţiei omogene, iar

$$v_2(x) = C\cdot x, \qquad (7.28)$$

este soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene.

Constanta C se determină impunând condiţia ca $v_2(x)$ să fie soluţie a ecuaţiei diferenţiale neomogene.

Cum $\frac{d^2v_2(x)}{dx^2} = 0$, se poate scrie $\alpha^2 Cx = \beta x$, de unde rezultă:

$$C = \frac{\beta}{\alpha^2}. \qquad (7.29)$$

Deci soluţia ecuaţiei diferenţiale (7.25) devine

$$v(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \frac{\beta}{\alpha^2}x, \qquad (7.30)$$

iar derivata ei este

$$\frac{dv(x)}{dx} = \alpha A\cos\alpha x - \alpha B\sin\alpha x + \frac{\beta}{\alpha^2}. \qquad (7.31)$$

Din condiţiile de *rezemare* rezultă:

- la $x = 0$, $v(x) = 0$; $\Rightarrow$ $B = 0$;

- la $x = l$, $v(x) = 0$; $\Rightarrow$ $A\sin\alpha l + \frac{\beta}{\alpha^2} l = 0$; (7.32)

- la $x = l$, $\frac{dv(x)}{dx} = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha A\cos\alpha l + \frac{\beta}{\alpha^2} = 0$. (7.33)

Dacă se adună la ecuaţia (7.32), ecuaţia (7.33) înmulţită cu (*-l*), se obţine:

$$A(\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l) = 0 . \quad (7.34)$$

Se observă că $A \neq 0$, deoarece în caz contrar rezultă $\beta = 0$ iar săgeata $v(x)$ ar fi egală cu zero. Ecuaţia (7.34) devine:

$$\mathrm{tg}\alpha l = \alpha l . \quad (7.35)$$

Cea mai mică soluţie diferită de zero a ecuaţiei transcendente (7.35) este

$$\alpha l = 4{,}4934095 \approx \sqrt{2}\cdot\pi , \quad (7.36)$$

iar celelalte sunt de tipul:

$$\alpha l = \sqrt{2}\pi + k\pi . \quad (7.37)$$

Ridicând la pătrat relaţia (7.36) şi ţinând seama de notaţia (7.24), se obţine valoarea minimă a forţei critice de flambaj:

$$\boxed{F_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_{min}}{l^2}} \quad (7.38)$$

Pentru $k \geq 1$, forţele critice au valori mult mai mari,

$$F_{cr,k} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 \frac{2\pi^2 EI_{min}}{l^2} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 F_{cr} , \quad (7.39)$$

care nu prezintă interes pentru cazul de rezemare considerat, bara pierzându-şi stabilitatea la cea mai mică valoare a forţei critice.

Ecuaţia axei deformate a barei după pierderea stabilităţii elastice este:

$$v(x) = A\left(\sin\frac{\sqrt{2}\pi x}{l} - \frac{x}{l}\sin(\sqrt{2}\pi)\right) . \quad (7.40)$$

7.2.4. Bara încastrată la ambele capete

Se consideră bara de rigiditate constantă la încovoiere din figura 7.5, comprimată cu forţa critică de flambaj F_{cr}.

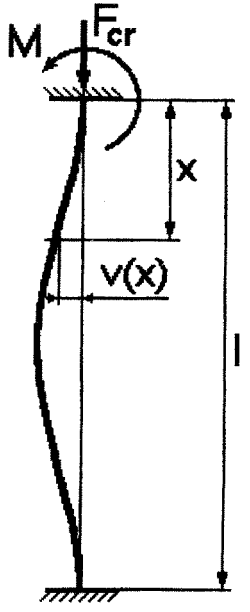


Fig. 7.5.

Într-o secţiune oarecare, la distanţa x de căpătul liber al barei, unde săgeata este $v(x)$, forţa F_{cr} produce momentul încovoietor

$$M_i(x) = F_{cr} \cdot v(x) - M. \qquad (7.41)$$

Ecuaţia diferenţială a axei deformate devine:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M_i(x)}{EI_{min}} = -\frac{F_{cr} \cdot v(x)}{EI_{min}} + \frac{M}{EI_{min}} . \qquad (7.42)$$

Notând

$$\alpha^2 = \frac{F_{cr}}{EI_{min}} \text{ şi } \gamma = \frac{M}{EI_{min}}, \qquad (7.43)$$

ecuaţia (7.42) se scrie sub forma:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot v(x) = \gamma . \qquad (7.44)$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este de forma

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x), \qquad (7.45)$$

unde

$$v_1(x) = A \sin\alpha x + B \cos\alpha x, \qquad (7.46)$$

este soluţia generală a ecuaţiei omogene, iar

$$v_2(x) = D, \qquad (7.47)$$

este soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene.

Constanta D se determină impunând condiţia ca $v_2(x)$ să fie soluţie a ecuaţiei diferenţiale neomogene.

Cum $\frac{d^2v_2(x)}{dx^2} = 0$, se poate scrie $\alpha^2 D = \gamma$, de unde rezultă:

$$D = \frac{\gamma}{\alpha^2} . \qquad (7.48)$$

Deci soluţia ecuaţiei diferenţiale (7.44) devine

$$v(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \frac{\gamma}{\alpha^2}, \tag{7.49}$$

iar derivata ei este

$$\frac{dv(x)}{dx} = \alpha A\cos\alpha x - \alpha B\sin\alpha x. \tag{7.50}$$

Din condiţiile de *rezemare* rezultă:

- la $x = 0$, $v(x) = 0$; $\Rightarrow$ $B = -\frac{\gamma}{\alpha^2}$; (7.51)

- la $x = 0$, $\frac{dv(x)}{dx} = 0$; $\Rightarrow$ $\alpha A = 0$; $\Rightarrow$ $A = 0$, deoarece $\alpha \neq 0$;

- la $x = l$, $v(x) = 0$; $\Rightarrow$ $-\frac{\gamma}{\alpha^2}(\cos\alpha l - 1) = 0$; (7.52)

- la $x = l$, $\frac{dv(x)}{dx} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\gamma}{\alpha}\sin\alpha l = 0$. (7.53)

În ecuaţiile (7.52) şi (7.53) $\gamma \neq 0$ deoarece în caz contrar, din relaţia (7.51) rezultă $B = 0$ ceea ce ar însemna că $v(x) = 0$, adică fenomenul de flambaj nu s-ar produce.

Din cele patru condiţii de rezemare rezultă că trebuie satisfăcute simultan ecuaţiile:

$$\begin{cases}\cos\alpha l = 1\\ \sin\alpha l = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha l = 0, 2\pi, \cdots 2k\pi\\ \alpha l = 0, \pi, \cdots k\pi\end{cases} \Rightarrow \alpha l = 0, 2\pi, \cdots 2k\pi. \tag{7.54}$$

Din prima soluţie diferită de zero rezultă

$$\alpha = \frac{2\pi}{l},$$

care prin ridicare la pătrat şi înlocuire în relaţia (7.43), conduce la obţinerea valorii minime a forţei critice de flambaj:

$$\boxed{F_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2}} \tag{7.55}$$

Pentru $k \geq 2$, forţele critice au valori mult mai mari,

$$F_{cr,k} = k^2\frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2} = k^2 F_{cr}, \tag{7.56}$$

care nu prezintă interes pentru cazul de rezemare considerat, bara pierzându-şi stabilitatea la cea mai mică valoare a forţei critice.

Ecuaţia axei deformate a barei după pierderea stabilităţii elastice este:

$$v(x) = B\left(\cos\frac{2\pi x}{l} - 1\right). \qquad (7.57)$$

7.3. Forma generală a formulei lui Euler şi limitele ei de aplicare

Expresiile pentru calculul forţei critice de flambaj în cele patru cazuri analizate, (7.9), (7.19), (7.38) şi (7.55), diferă una de alta numai printr-un coeficient numeric. Ele pot fi scrise sub forma generală

$$\boxed{F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_f^2}} \qquad (7.58)$$

unde l_f este *lungimea de flambaj*, dependentă de modul de rezemare a barei comprimate. Relaţia (7.58) este forma generală a formulei lui Euler.

Pentru cele patru cazuri analizate, lungimea de flambaj este:

- bara articulată la ambele capete, $l_f = l$;
- bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, $l_f = 2l$;
- bara încastrată la un capăt şi articulată la celălalt, $l_f = 0{,}7l$;
- bara încastrată la ambele capete, $l_f = 0{,}5l$.

7.3.1. Flambajul elastic

Formula lui Euler pentru calculul forţei critice de flambaj poate fi folosită numai dacă tensiunile din bară nu depăşesc limita de proporţionalitate a materialului:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} \le \sigma_p. \qquad (7.59)$$

Dacă în relaţia (7.58) se înlocuieşte

$$I_{min} = A \cdot i_{min}^2, \tag{7.60}$$

unde i_{min} este raza de inerţie minimă a secţiunii transversale, expresia forţei critice de flambaj devine:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E A i_{min}^2}{l_f^2}. \tag{7.61}$$

Înlocuind această expresie în relaţia (7.59), pentru tensiunea critică de flambaj se obţine:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E A i_{min}^2}{l_f^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_f}{i_{min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{7.62}$$

unde λ este *coeficientul de zvelteţe* (sau de subţirime) al barei:

$$\boxed{\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}} \tag{7.63}$$

Dacă se reprezintă grafic variaţia tensiunii critice în funcţie de coeficientul de zvelteţe, se obţine o hiperbolă, cunoscută sub numele de *hiperbola lui Euler* (fig. 7.6).

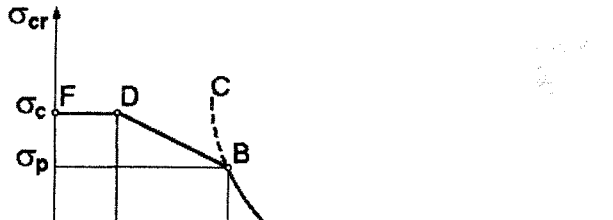


Fig. 7.6

Formula lui Euler este valabilă pentru valori ale tensiunii critice de flambaj sub limita de proporţionalitate (7.59).

Pentru tensiunea critică egală cu limita de proporţionalitate, coeficientul de zvelteţe este

$$\lambda_0 = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}. \qquad (7.64)$$

Pentru condiţia $\sigma_{cr} \le \sigma_p$, rezultă $\lambda \ge \lambda_0$ adică în bară se produc numai deformaţii elastice, iar dacă $\sigma_{cr} \ge \sigma_p$, rezultă $\lambda \le \lambda_0$ şi în bară se produc deformaţii plastice. Punctul *B*, de abscisă λ_0 (fig. 7.6), împarte domeniul de variaţie al lui λ în două părţi:

- *zona flambajului elastic*, $\lambda \ge \lambda_0$;

- *zona flambajului plastic*, $\lambda < \lambda_0$.

Deci formula lui Euler pentru calculul forţei critice de flambaj se poate aplica numai în domeniul flambajului elastic.

Valoarea coeficientului de zvelteţe λ_0 depinde numai de materialul barei. Pentru oţel OL 37, $\lambda_0 = 105$; cu cât oţelul este mai rezistent, cu atât λ_0 este mai mic şi domeniul de valabilitate a relaţiei lui Euler este mai mare.

7.3.2. Flambajul plastic

În domeniul flambajului plastic, pe baza rezultatelor experimentale, s-au propus diferite relaţii empirice pentru funcţia $\sigma_{cr}(\lambda)$. Se cunosc astfel relaţii liniare, parabolice, eliptice, pentru porţiunea *BD* din figura 7.6.

Tetmajer şi *Iasinski* au propus relaţia liniară

$$\boxed{\sigma_{cr} = a - b\lambda} \qquad (7.65)$$

în care *a* şi *b* sunt coeficienţi care depind de material. De exemplu pentru oţelul OL 37, $a = 304$ MPa şi $b = 1{,}12$ MPa.

Pentru fontă ($\lambda_0 = 80$), se foloseşte relaţia parabolică

$$\sigma_{cr} = 776 - 12\lambda + 0{,}053\lambda^2 \text{ [MPa]}, \quad 0<\lambda<\lambda_0. \qquad (7.66)$$

Formula lui Tetmajer - Iasinski este valabilă pentru valori ale tensiunii critice de flambaj care nu depăşesc limita de curgere a materialului (σ_c), căreia îi corespunde un coeficient de zvelteţe λ_1 (punctul *D*, fig. 7.6).

Pentru valori ale lui $\lambda < \lambda_1$, se consideră că barele drepte comprimate nu-şi mai pierd stabilitatea, calculul făcându-se numai la compresiune.

7.4. Calculul la flambaj

Calculul la flambaj constă fie în a dimensiona o bară solicitată la compresiune adoptând un coeficient de siguranţă la flambaj, fie în a verifica dacă valoarea coeficientului de siguranţă efectiv îndeplineşte condiţia de stabilitate.

Calculul de dimensionare se desfăşoară în următoarele etape:
- se adoptă coeficientul de siguranţă la flambaj, c;
- se presupune că flambajul se produce în domeniul elastic, adică de valabilitate a formulei lui Euler;

din condiţia de stabilitate,

$$c = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{F l_f^2},$$

se determină momentul de inerţie minim,

$$I_{min} = \frac{c F l_f^2}{\pi^2 E}; \qquad (7.67)$$

- se alege forma secţiunii transversale şi se stabilesc dimensiunile acesteia;
- se calculează raza de inerţie minimă,

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}; \qquad (7.68)$$

- se calculează coeficientul de zvelteţe,

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}};$$

- dacă $\lambda \geq \lambda_0$ atunci dimensionarea este corectă, presupunerea că flambajul se produce în domeniul elastic fiind confirmată;

- dacă $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ atunci dimensionarea cu formula lui Euler nu este corectă şi se continuă calculul cu formulele flambajului plastic;

- se calculează forţa critică de flambaj în domeniul plastic, pentru dimensiunile stabilite anterior, cu relaţia:

$$F_{cr} = (a - b\lambda)\cdot A; \qquad (7.69)$$

- se calculează coeficientul de siguranţă,

$$c = \frac{F_{cr}}{F};$$

- dacă valoarea calculată a coeficientului de siguranţă la flambaj nu este egală cu cea adoptată, atunci se măresc dimensiunile până când se obţine coeficientul de siguranţă impus;
- dacă $\lambda < \lambda_1$, nu există pericolul de pierdere a stabilităţii şi calculul se face la compresiune.

Calculul de verificare se desfăşoară în următoarele etape:
- se calculează coeficientul de zvelteţe, λ;
  - dacă $\lambda > \lambda_0$ se calculează forţa critică de flambaj cu formula lui Euler;
  - dacă $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ forţa critică de flambaj se calculează cu relaţia (7.69);
- se calculează coeficientul efectiv de siguranţă şi se verifică dacă este îndeplinită condiţia de stabilitate;
  - dacă $\lambda < \lambda_1$, bara se verifică la compresiune.

7.5. Aplicaţii

Aplicaţia 7.1. Să se dimensioneze o tijă din oţel de secţiune circulară, încastrată la un capăt şi articulată la celălalt, având lungimea $l = 1{,}6$m, comprimată cu o forţă $F = 200$ kN.
Se dau: $c = 4$, $E = 2{,}1\cdot 10^5$ MPa, $\lambda_0 = 105$, $\lambda_1 = 40$, iar pentru flambajul în domeniul plastic, $\sigma_{cr} = 304 - 1{,}12\,\lambda$ [MPa].

Rezolvare
Lungimea de flambaj, pentru cazul de rezemare considerat, este:

$$l_f = 0{,}7\cdot l = 0{,}7\cdot 1600 = 1120 \text{ mm}.$$

Se calculează momentul de inerţie cu ajutorul formulei (7.67) şi se determină diametrul secţiunii transversale:

$$I = \frac{cFl_f^2}{\pi^2 E} = \frac{\pi d^4}{64} \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{64cFl_f^2}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1120^2}{\pi^3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5}} = 56\,\text{mm}$$

Raza de inerţie a secţiunii este:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64}\frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{56}{4} = 14\,\text{mm}.$$

Coeficientul de zvelteţe are valoarea:

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{1120}{14} = 80 < \lambda_0.$$

Deoarece $\lambda < \lambda_0$, dimensionarea bazată pe formula lui Euler nu este corectă şi se continuă calculul la flambaj pentru domeniul plastic.
Forţa critică de flambaj pentru domeniul plastic este:

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = (304 - 1{,}12 \cdot 80) \cdot \frac{\pi \cdot 56^2}{4} = 528\,069\,\text{N}.$$

Coeficientul efectiv de siguranţă la flambaj este:

$$c_{ef} = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{528069}{200000} = 2{,}64 < c.$$

Deoarece coeficientul de siguranţă efectiv este mai mic decât cel impus, este necesară mărirea diametrului. Se continuă calculul cu valoarea $d = 64$ mm.
Raza de inerţie pentru această valoare a diametrului este:

$$i = \frac{d}{4} = \frac{64}{4} = 16\,\text{mm}.$$

Coeficientul de zvelteţe devine

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{1120}{16} = 70,$$

iar forţa critică de flambaj corespunzătoare are valoarea:

$$F_{cr} = (304 - 1{,}12 \cdot \lambda)A = (304 - 1{,}12 \cdot 70)\frac{\pi \cdot 64^2}{4} = 725753\,\text{N}.$$

Coeficientul de siguranţă la flambaj pentru bara cu diametrul $d = 64$ mm este:

$$c_{ef} = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{725753}{200000} = 3{,}62 < c.$$

Deoarece coeficientul de siguranţă efectiv este mai mic decât cel impus (c = 4), este necesară o nouă mărire a diametrului. Se continuă calculul cu valoarea d = 67 mm.

Raza de inerţie pentru această valoare a diametrului este

$$i = \frac{d}{4} = \frac{67}{4} = 16{,}75 \text{ mm}.$$

Coeficientul de zveltețe devine

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{1120}{16{,}75} = 66{,}86,$$

iar forţa critică de flambaj corespunzătoare are valoarea:

$$F_{cr} = (304 - 1{,}12 \cdot \lambda)A = (304 - 1{,}12 \cdot 66{,}86)\frac{\pi \cdot 67^2}{4} = 807763 \text{ N}.$$

Coeficientul de siguranţă la flambaj pentru tija cu diametrul d = 67 mm este:

$$c_{ef} = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{807763}{200000} = 4{,}03 \approx 4 = c.$$

Pentru acest caz, ca şi pentru toate cazurile în care dimensiunile secţiunii transversale pot fi exprimate printr-o singură necunoscută, după constatarea că domeniul este cel al flambajului plastic, calculul se poate desfăşura după cum urmează:

Din condiţia de stabilitate

$$c = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{\left(304 - 1{,}12\frac{l_f \cdot 4}{d}\right)\frac{\pi d^2}{4}}{F},$$

se obţine ecuaţia

$$4 = \frac{\left(304 - 1{,}12\frac{1120 \cdot 4}{d}\right)\frac{\pi d^2}{4}}{200000} \Rightarrow 238{,}76 \cdot d^2 - 3940{,}81 \cdot d - 800000 = 0$$

din care rezultă soluţia convenabilă:

$$d = 66{,}7 \text{ mm}.$$

Aplicaţia 7.2. Să se verifice la flambaj o bară încastrată la ambele capete, cu lungimea l = 1m, solicitată la compresiune de forţa F = 100 kN; secţiunea transversală are forma şi dimensiunile din figura 7.7. Se dau: c = 6, E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa, λ_0 = 86, iar pentru flambajul în domeniul plastic, σ_{cr} = 461 - 2,25 λ [MPa].

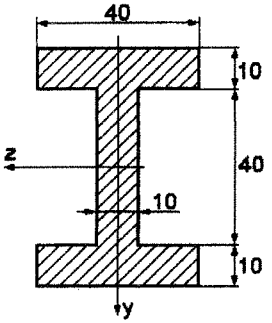


Fig. 7.7

Rezolvare

Lungimea de flambaj pentru bara încastrată la ambele capete este

$$l_f = 0{,}5\cdot l = 0{,}5\cdot 1000 = 500 \text{ mm}.$$

Momentele de inerţie principale centrale ale secţiunii transversale sunt:

$$I_z = \frac{40\cdot 60^3}{12} - 2\cdot\frac{15\cdot 40^3}{12} = 56\cdot10^4 \text{ mm}^4;$$

$$I_y = 2\cdot\frac{10\cdot 40^3}{12} + \frac{40\cdot 10^3}{12} = 11\cdot10^4 \text{ mm}^4.$$

Momentul de inerţie minim este $I_{min} = I_y = 11\cdot10^4$ mm^4, iar raza de inerţie minimă are valoarea:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{11\cdot10^4}{1200}} = 9{,}57 \text{ mm}.$$

Coeficientul de zvelteţe al barei este:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{500}{9{,}57} = 52{,}2 < \lambda_0.$$

Rezultă că flambajul se produce în domeniul plastic, iar forţa critică de flambaj are valoarea:

$$F_{cr} = (461 - 2{,}25\lambda)A = (461 - 2{,}25\cdot 52{,}2)\cdot 1200 = 694140 \text{ N}.$$

Coeficientul efectiv de siguranţă la flambaj este:

$$c_{ef} = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{694140}{100000} = 6{,}94 > c = 6.$$

Se constată că este îndeplinită condiţia de stabilitate.

8. METODE ENERGETICE PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR ŞI RIDICAREA NEDETERMINĂRII

Abordarea energetică a problemelor de rezistenţa materialelor este o alternativă foarte eficientă a abordării statice. Deplasările şi sistemele static nedeterminate pot fi studiate pe o cale sistematizată, care conduce mai rapid la rezultat. În cazul în care soluţia analitică este greu de obţinut, metodele energetice permit găsirea unor soluţii aproximative. În continuare se prezintă câteva teoreme asupra lucrului mecanic şi energiei potenţiale de deformaţie.

Se introduc următoarele noţiuni:

- *noţiunea de forţă*, în sens generalizat, care include atât forţele cât şi momentele;
- *noţiunea de deplasare*, în sens generalizat, care include atât deplasările liniare cât şi cele unghiulare (rotirile).

Pentru obţinerea lucrului mecanic, unei forţe îi va corespunde o deplasare, iar unui moment, o rotire.

8.1. Teorema reciprocităţii lucrului mecanic (teorema lui Betti)

Se consideră un corp elastic încărcat cu două grupe de forţe P_i (cuprinzând forţele $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$) şi Q_j (cuprinzând forţele $Q_1, Q_2, \ldots, Q_j, \ldots$); se notează cu δ' efectul forţelor P_i şi cu δ'' efectul forţelor Q_j.

Se produc deplasările:

- δ'_i, deplasările punctelor de aplicaţie ale forţelor P_i, pe direcţiile corespunzătoare, când acţionează forţele P_i;
- δ'_j, deplasările punctelor de aplicaţie ale forţelor Q_j, pe direcţiile corespunzătoare, când acţionează numai grupul de forţe P_i (fig. 8.1a şi b);

- δ_i'', deplasările punctelor de aplicaţie ale forţelor P_i, pe direcţiile corespunzătoare, când acţionează doar forţele Q_j;
- δ_j, deplasările punctelor de aplicaţie ale forţelor Q_j, pe direcţiile corespunzătoare, când acţionează doar grupul de forţe Q_j (fig. 8.1a şi c).

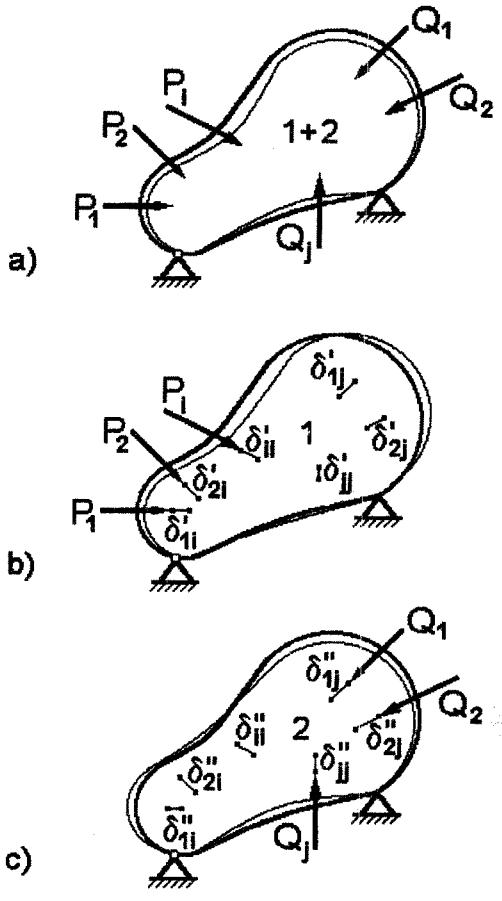


Fig. 8.1.

Se presupune, ca *primă ipoteză de încărcare*, că cele două grupe de forţe acţionează simultan asupra corpului elastic, fiind valabil principiul suprapunerii efectelor. Deplasările fiecărui punct fiind $(\delta' + \delta'')$, lucrul mecanic exterior are expresia:

$$L_e = \frac{1}{2}\sum_i P_i(\delta_i' + \delta_i'') + \frac{1}{2}\sum_j Q_j(\delta_j' + \delta_j''). \qquad (8.1)$$

Această valoare a lucrului mecanic exterior nu depinde de ordinea de aplicare a forţelor, de aceea se va considera o *a doua ipoteză de încărcare*. Se presupune că se aplică mai întâi primul grup de forţe P_i. Lucrul mecanic corespunzător este

$$L_{e1} = \frac{1}{2}\sum_i P_i \delta_i' \,. \tag{8.2}$$

În această situaţie, se aplică al doilea grup de forţe Q_j. Corpul elastic capătă următoarele deplasări produse de forţele Q_j :

- deplasările δ_j'' pe direcţiile forţelor nou aplicate (grupa a doua de forţe Q_j), a căror intensitate creşte de la zero la valoarea finală;
- deplasările δ_i'' pe direcţiile forţelor aplicate precedent (prima grupă de forţe P_i), a căror intensitate este cea finală.

Lucrul mecanic suplimentar se scrie atunci sub forma:

$$L_{e2} = \sum_i P_i \delta_i'' + \frac{1}{2}\sum_j Q_j \delta_j'' \,. \tag{8.3}$$

Deoarece ordinea de încărcare nu contează, se poate scrie:

$$L_e = L_{e1} + L_{e2} \,. \tag{8.4}$$

Introducând în această egalitate expresiile (8.1), (8.2) şi (8.3) rezultă:

$$\frac{1}{2}\sum_i P_i(\delta_i' + \delta_i'') + \frac{1}{2}\sum_j Q_j(\delta_j' + \delta_j'') = \frac{1}{2}\sum_i P_i \delta_i' + \sum_i P_i \delta_i'' + \frac{1}{2}\sum_j Q_j \delta_j''$$

care după simplificări devine:

$$\boxed{\sum_i P_i \delta_i'' = \sum_j Q_j \delta_j'} \tag{8.5}$$

Relaţia (8.5) exprimă *reciprocitatea lucrului mecanic exterior*, iar teorema corespunzătoare (formulată de Betti), se enunţă astfel:
lucrul mecanic produs de un grup de forţe P_i prin deplasările provocate de un alt grup de forţe Q_j este egal cu lucrul mecanic produs de grupul de forţe Q_j prin deplasările provocate de grupul de forţe P_i.

8.2. Teorema reciprocităţii deplasărilor (teorema lui Maxwell)

Această teoremă poate fi privită ca un caz particular al teoremei reciprocităţii lucrului mecanic.

Dacă se consideră că cele două grupe de forţe se reduc la câte o singură forţă P_i (aplicată în punctul *i*), respectiv Q_j (aplicată în punctul *j*), relaţia (8.5), cu schimbarea corespunzătoare a notaţiei deplasărilor, se reduce la:

$$P_i\delta_{ij} = Q_j\delta_{ji}, \qquad (8.6)$$

în care

- δ_{ij} reprezintă deplasarea în *i* (pe direcţia forţei P_i), când în punctul *j* acţionează forţa Q_j;
- δ_{ji} reprezintă deplasarea în *j* (pe direcţia forţei Q_j), când în punctul *i* acţionează forţa P_i.

Se presupune că forţele P_i şi Q_j (în sens generalizat), sunt numeric egale cu unitatea. Din relaţia (8.6) rezultă:

$$\boxed{\delta_{ij} = \delta_{ji}} \qquad (8.7)$$

adică, independent de natura lor, cele două deplasări sunt numeric egale. Relaţia (8.7) exprimă *teorema reciprocităţii deplasărilor* (formulată de Maxwell), care se enunţă astfel:

dacă asupra unui corp elastic acţionează două forţe numeric egale cu unitatea, atunci deplasarea provocată de forţa a doua pe direcţia primei forţe este numeric egală cu deplasarea provocată de prima forţă pe direcţia celei de-a doua forţe.

Când forţele sunt de aceeaşi natură, deplasările sunt şi ele de aceeaşi natură.

8.3. Teorema reciprocităţii forţelor

Această teoremă poate fi de asemenea privită ca un caz particular al teoremei lui Betti.

Dacă relaţia (8.6) se scrie sub forma

$$P_{ij}\delta_i = Q_{ji}\delta_j \qquad (8.8)$$

şi deplasările se consideră numeric egale cu unitatea ($\delta_i = 1$ şi $\delta_j = 1$) atunci rezultă:

$$\boxed{P_{ij} = Q_{ji}} \tag{8.9}$$

Relaţia (8.9) exprimă *teorema reciprocităţii forţelor* care se enunţă astfel:

forţa generalizată aplicată în punctul i, care produce pe direcţia j o deplasare generalizată egală cu unitatea, este numeric egală cu forţa generalizată aplicată în punctul j, care produce pe direcţia i o deplasare generalizată egală cu unitatea.

Această teoremă se aplică şi legăturilor, respectiv reacţiunilor sistemelor static nedeterminate.

8.4. Teoremele lui Castigliano

Se consideră un corp elastic încărcat cu o serie de forţe generalizate concentrate $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ (fig. 8.2a); se presupune că fiecare forţă acţionează independent în raport cu celelalte.

Lucrul mecanic exterior poate fi exprimat sub forma unei funcţii pătratice omogene de forţe:

$$L_e = f(P_1, P_2, \cdots, P_i, \cdots). \tag{8.10}$$

Dacă uneia din forţe, de exemplu P_i, i se dă o creştere elementară dP_i (fig. 8.2b), atunci lucrul mecanic creşte cu

$$dL_e = \frac{\partial L_e}{\partial P_i} dP_i, \tag{8.11}$$

astfel încât lucrul mecanic total este:

$$L_{total} = L_e + dL_e = L_e + \frac{\partial L_e}{\partial P_i} dP_i. \tag{8.12}$$

Deoarece ordinea de aplicare a forţelor nu modifică valoarea lucrului mecanic total, se presupune că se aplică întâi forţa elementară dP_i şi apoi forţele $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$.

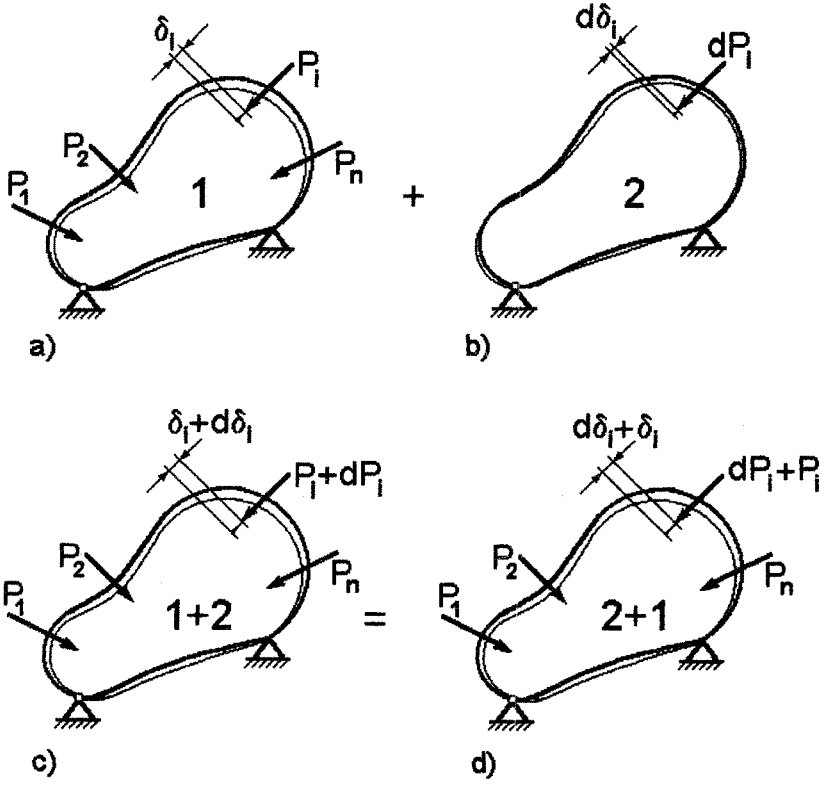


Fig. 8.2

Forţa elementară dP_i produce o deplasare elementară $d\delta_i$ pe direcţia ei de acţiune (fig. 8.2c), iar lucrul mecanic este

$$dL_e = \frac{1}{2} dP_i \cdot d\delta_i . \qquad (8.13)$$

Suprapunând forţele P_1, P_2, . . . , P_i, . . . (fig. 8.2d), acestea produc lucrul mecanic L_e, în timp ce forţa elementară dP_i parcurge cu întreaga intensitate deplasarea δ_i, producând lucrul mecanic

$$dL = dP_i \cdot \delta_i . \qquad (8.14)$$

Lucrul mecanic total are în acest caz expresia:

$$L_{total} = L_e + dL_e + dL = L_e + \frac{1}{2} dP_i \cdot d\delta_i + dP_i \cdot \delta_i . \qquad (8.15)$$

Egalând expresiile (8.12) şi (8.15) se obţine

$$L_e + \frac{\partial L_e}{\partial P_i} dP_i = L_e + \frac{1}{2} dP_i \cdot d\delta_i + dP_i \cdot \delta_i, \qquad (8.16)$$

iar după reducerea termenilor asemenea, neglijarea termenului dat de relaţia (8.13) care este un infinit mic de ordinul al doilea şi simplificare, rezultă:

$$\frac{\partial L_e}{\partial P_i} = \delta_i . \qquad (8.17)$$

Dacă deformarea corpului are loc în domeniul elastic, atunci lucrul mecanic produs de forţele exterioare se acumulează, practic în întregime, ca energie potenţială de deformaţie U, iar relaţia (8.17) se poate scrie:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i} \qquad (8.18)$$

Relaţia (8.18) exprimă *prima teoremă a lui Castigliano* care se enunţă astfel:

derivata parţială a energiei potenţiale de deformaţie acumulată într-un corp elastic, în raport cu o forţă exterioară, este egală cu deplasarea corespunzătoare punctului de aplicaţie al forţei, în sensul şi pe direcţia acesteia.

Pe marginea acestei teoreme se pot face următoarele completări:

- pentru a putea deriva energia potenţială de deformaţie în raport cu o anumită forţă P_i, aceasta trebuie să apară explicit în expresia energiei;
- pentru determinarea unei deplasări într-un punct în care nu este aplicată o forţă exterioară, se aplică o *forţă fictivă* X; după efectuarea derivatei parţiale $\partial U/\partial X$, în expresia deplasării δ, se va considera $X = 0$ (pentru calculul deplasărilor liniare, X reprezintă o forţă, iar pentru rotiri, un moment);
- deplasarea relativă dintre două puncte poate fi obţinută introducând, în punctele respective, două forţe egale şi de sens contrar X; ea va fi reprezentată de derivată parţială a energiei potenţiale de deformaţie în raport cu valoarea comună a acestor forţe X (reale sau fictive).

În cazul cel mai general de solicitare în domeniul elastic, energia potențială de deformație acumulată într-o bară dreaptă, sau un sistem de bare drepte, este

$$U = \int_{(l)} \frac{N^2}{2EA} dx + \int_{(l)} k_y \frac{T_y^2}{2GA} dx + \int_{(l)} k_z \frac{T_z^2}{2GA} dx + \\ + \int_{(l)} \frac{M_t^2}{2GI_d} dx + \int_{(l)} \frac{M_{iy}^2}{2EI_y} dx + \int_{(l)} \frac{M_{iz}^2}{2EI_z} dx \tag{8.19}$$

iar deplasarea punctului de aplicație al unei forțe P_i se calculează cu relația:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \int_{(l)} \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_i} dx + \int_{(l)} k_y \frac{T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_i} dx + \int_{(l)} k_z \frac{T_z}{GA} \frac{\partial T_z}{\partial P_i} dx + \\ + \int_{(l)} \frac{M_t}{GI_d} \frac{\partial M_t}{\partial P_i} dx + \int_{(l)} \frac{M_{iy}}{EI_y} \frac{\partial M_{iy}}{\partial P_i} dx + \int_{(l)} \frac{M_{iz}}{EI_z} \frac{\partial M_{iz}}{\partial P_i} dx \tag{8.20}$$

În cazul unei forțe fictive X, în relația (8.20) se va înlocui P_i cu X, apoi, în rezultatul final, se va lua $X = 0$.

În baza faptului că lucrul mecanic este funcție pătratică omogenă atât de forțele exterioare, cât și de deplasările corespunzătoare, se poate stabili o *a doua teoremă a lui Castigliano*.

Considerând același corp elastic, reprezentat în figura 8.2a, se poate exprima lucrul mecanic exterior sub forma:

$$L_e = f(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_i, \cdots), \tag{8.21}$$

în care δ_i sunt deplasările corespunzătoare forțelor P_i.

Dacă uneia din deplasări, de exemplu lui δ_i, i se dă o creștere elementară $d\delta_i$, lucrul mecanic va crește cu

$$dL_e = \frac{\partial L_e}{\partial \delta_i} d\delta_i, \tag{8.22}$$

astfel încât lucrul mecanic total este:

$$L_{total} = L_e + dL_e = L_e + \frac{\partial L_e}{\partial \delta_i} d\delta_i . \qquad (8.23)$$

Deoarece ordinea de impunere a deplasărilor nu modifică valoarea lucrului mecanic total, se presupune că se impune mai întâi deplasarea elementară $d\delta_i$ şi apoi deplasările $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i, \ldots$.

Deplasarea elementară produce o variaţie a lucrului mecanic,

$$dL_e = P_i \cdot d\delta_i . \qquad (8.24)$$

Lucrul mecanic total în acest caz este

$$L_{total} = L_e + dL_e = L_e + P_i \cdot d\delta_i . \qquad (8.25)$$

Egalând expresiile (8.23) şi (8.25), se obţine

$$L_e + \frac{\partial L_e}{\partial \delta_i} d\delta_i = L_e + P_i \cdot d\delta_i , \qquad (8.26)$$

iar după reducerea termenilor asemenea şi simplificare, ţinând cont de faptul că $L_e = U$, rezultă:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i} \qquad (8.27)$$

Relaţia (8.27) exprimă *a doua teoremă a lui Castigliano* care se enunţă astfel:

derivata parţială a energiei potenţiale de deformaţie acumulată într-un corp elastic, în raport cu o deplasare, este egală cu forţa aplicată în punctul în care se produce deplasarea, în sensul şi pe direcţia acesteia.

8.5. Teorema minimului energiei potenţiale de deformaţie

Prima teoremă a lui Castigliano poate fi aplicată şi la calculul sistemelor static nedeterminate.

În cazul sistemelor *static nedeterminate exterior*, alegând ca necunoscute static nedeterminate reacţiunile din reazeme, $(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots)$, deplasările corespunzătoare trebuie să fie nule; se poate scrie:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0, \quad \cdots \quad , \frac{\partial U}{\partial X_i} = 0, \quad \cdots} \qquad (8.28)$$

Considerând însă că $U = f(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots)$, relaţiile (8.28) reprezintă derivatele parţiale ale energiei potenţiale de deformaţie, ceea ce înseamnă că funcţia trece printr-un extrem.

Deoarece energia potenţială de deformaţie este întotdeauna pozitivă (sumă de pătratele solicitărilor), derivata a doua este întotdeauna pozitivă, deci extremul este un minim.

De aici rezultă *teorema lui Menabrea*:
reacţiunile static nedeterminate au astfel de valori, încât energia potenţială de deformaţie acumulată în întregul sistem elastic să fie minimă.

Raţionamentul precedent poate fi aplicat şi în cazul sistemelor *static nedeterminate interior*. Necunoscutele vor fi, în acest caz, momente încovoietoare, forţe tăietoare, forţe axiale şi momente de torsiune. Se ajunge la concluzia că ***mărimile eforturilor static nedeterminate interior au astfel de valori încât eneria potenţială de deformaţie acumulată în întregul sistem elastic să fie minimă.***

În studiul sistemelor complexe trebuie ca întotdeauna înainte de a aplica principiul minimului energiei potenţiale de deformaţie, să se elimine din calcul un număr de legături egal cu numărul ecuaţiilor de echilibru şi să nu se aplice teorema lui Menabrea decât efectiv mărimilor static nedeterminate.

8.6. Calculul deplasărilor prin metoda Mohr-Maxwell

Relaţia (8.20), care permite calculul deplasărilor sistemelor elastice cu ajutorul primei teoreme a lui Castigliano, poate fi adusă sub o formă nouă; pentru aceasta se va ţine seama că eforturile pot fi exprimate ca funcţii liniare omogene de forţele exterioare:

$$N = n_1P_1 + n_2P_2 + \cdots + n_iP_i + \cdots, \tag{8.29}$$

$$T = t_1P_1 + t_2P_2 + \cdots + t_iP_i + \cdots, \tag{8.30}$$

$$M_t = m_{t1}P_1 + m_{t2}P_2 + \cdots + m_{ti}P_i + \cdots, \tag{8.31}$$

$$M = m_1P_1 + m_2P_2 + \cdots + m_iP_i + \cdots, \tag{8.32}$$

în care n_i, t_i, m_{ti}, m_i reprezintă *coeficienţi de influenţă* depinzând de secţiunea în care sunt evaluate eforturile. Semnificaţia lor fizică rezultă luând o forţă exterioară egală cu unitatea, iar toate celelalte nule. Făcând, de exemplu $P_1 = 1$ şi $P_2 = P_3 = \ldots = 0$, relaţiile de mai sus devin:

$$N = n_1, \quad T = t_1, \quad M_t = m_{t1}, \quad M = m_1. \tag{8.33}$$

Astfel, n_1, t_1, m_{t1}, m_1 reprezintă eforturile într-o secţiune oarecare x provocate de o forţă generalizată egală cu unitatea ($P_1 = 1$) având acelaşi punct de aplicaţie şi aceeaşi direcţie ca şi forţa P_1; analog se definesc şi ceilalţi coeficienţi.

Pentru aplicarea primei teoreme a lui Castigliano se calculează derivatele parţiale din relaţia (8.20), de exemplu în raport cu forţa generalizată P_i:

$$\frac{\partial N}{\partial P_i} = n_i, \quad \frac{\partial T}{\partial P_i} = t_i \quad \frac{\partial M_t}{\partial P_i} = m_{ti}, \quad \frac{\partial M}{\partial P_i} = m_i. \tag{8.34}$$

Ţinând seama de relaţia (8.34), relaţia (8.20) se poate scrie sub forma:

$$\boxed{\delta_i = \int_{(l)} \frac{Nn_i}{EA}dx + \int_{(l)} k\frac{Tt_i}{GA}dx + \int_{(l)} \frac{M_t m_{ti}}{GI_d}dx + \int_{(l)} \frac{Mm_i}{EI}dx} \tag{8.35}$$

Formula precedentă, denumită *formula lui Mohr-Maxwell* arată că, pentru calculul deplasării unui punct i (notată δ_i) se procedează după cum urmează:

- se introduce o *forţă virtuală* $P_i = 1$ în acel punct, după direcţia deplasării căutate;
- se trasează diagramele de eforturi corespunzătoare, n_i, t_i, m_{ti}, m_i;
- se trasează separat diagramele de eforturi N, T, M_t, M produse de forţele exterioare reale;
- se efectuează integralele din relaţia (8.35); atunci când deplasarea rezultată din calcul este pozitivă, ea are sensul forţei virtuale unitare.

8.7. Procedeul Mohr-Vereşceaghin

Integralele care intervin în formula (8.35) au particularitatea că la numărător apare produsul a două funcţii, ultima fiind, la bare drepte, *liniară* (datorită faptului că rezultă din aplicarea pe sistemul de bare a unei forţe unitare).

Toate integralele fiind identice ca structură, se va face referire la integrala relativă la încovoiere:

$$J = \int \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{E} \int \frac{M}{I} m dx . \qquad (8.36)$$

În general $M(x)$ este o funcţie oarecare de x. Se disting două cazuri, după cum bara este de secţiune constantă sau variabilă, adică $I = \text{const.}$ sau $I = I(x)$.

În primul caz ($I = \text{const.}$), rigiditatea EI iese de sub semnul inegralei şi rămâne de efectuat:

$$EI\, J_1 = \int M(x) \cdot m(x) dx . \qquad (8.37)$$

În al doilea caz, raportul $M(x)/I(x)$ poate fi privit ca o funcţie de x şi integrala are aceeaşi structură:

$$EI\, J_2 = \int \frac{M(x)}{I(x)} \cdot m(x) dx , \qquad (8.38)$$

adică produsul dintre o *funcţie oarecare* de x şi m, care este o *funcţie liniară* de x.

Este deci suficient să se analizeze relaţia (8.37).

În raport cu un sistem de axe *xOM*, a cărui origine se va preciza ulterior, se reprezintă grafic diagrama $M = M(x)$, pe lungimea *s* a barei (fig. 8.3a).

Sub această diagramă se ia un nou sistem de axe *xOm* şi se reprezintă funcţia liniară *m*, care face unghiul α cu axa *Ox*. Originea ambelor sisteme de axe corespunde punctului în care dreapta *m* intersectează axa *Ox* (fig. 8.3b).

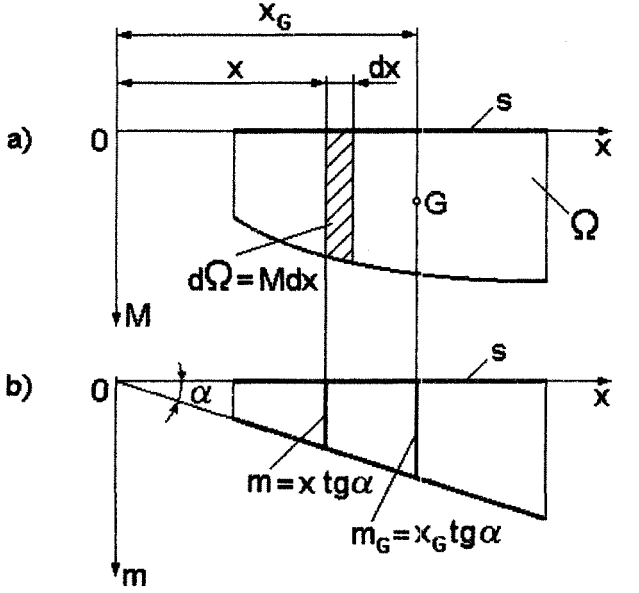


Fig. 8.3

În diagrama *M* se consideră un element de arie

$$d\Omega = M \cdot dx. \tag{8.39}$$

În dreptul secţiunii *x*, în diagrama *m*, ordonata are expresia

$$m = x \cdot tg\alpha. \tag{8.40}$$

Cu aceasta, integrala din relaţia (8.37) se scrie succesiv:

$$EI \cdot J_1 = \int m \cdot M(x)dx = \int m \cdot d\Omega = \int x tg\alpha \cdot d\Omega = tg\alpha \int x \cdot d\Omega. \tag{8.41}$$

Ultima integrală reprezintă un moment static, astfel încât se poate scrie:

$$\int x \cdot d\Omega = \Omega \cdot x_G, \tag{8.42}$$

în care Ω reprezintă **aria diagramei M**, iar

x_G - *abscisa centrului de greutate al diagramei M.*

Revenind la relaţia (8.37) se obţine

$$EI \cdot J_1 = tg\alpha \cdot \Omega x_G = \Omega \cdot x_G tg\alpha = \Omega \cdot m_G, \qquad (8.43)$$

adică ***integrala J_1 multiplicată cu rigiditatea EI, este egală cu produsul dintre aria Ω a diagramei de momente M şi ordonata m_G din diagrama m, corespunzătoare centrului de greutate al primei diagrame.***

Deci,

$$\boxed{J_1 = \frac{1}{EI}\int M(x) \cdot m(x)dx = \frac{1}{EI}\Omega \cdot m_G} \qquad (8.44)$$

Procedeul prezentat este denumit uneori *"procedeul înmulţirii celor două diagrame"*.

În cazul în care diagrama *M* este şi ea liniară, rolul celor două diagrame poate fi inversat.

8.8. Metoda eforturilor

8.8.1. Sistem de bază

Una din metodele cele mai răspândite pentru ridicarea nedeterminării este *metoda eforturilor*. Această metodă constă în transformarea sistemului static nedeterminat dat într-un *sistem fundamental sau de bază*, prin eliminarea legăturilor suplimentare exterioare sau interioare şi înlocuirea lor prin forţe sau momente, care sunt necunoscutele static nedeterminate.

În cazul acestei metode, necunoscutele sunt deci nişte eforturi static nedeterminate, a căror valoare se determină astfel încât deplasările în sistemul de bază sub acţiunea lor şi a sarcinilor să fie identice cu cele ale sistemului static nedeterminat dat.

Rezolvarea unui sistem static nedeterminat începe cu transformarea acestuia într-un sistem de bază sau fundamental. Transformarea unui sistem static nedeterminat dat într-un sistem de bază se poate face în mai multe moduri. Un lucru esenţial în obţinerea unui sistem de bază este acela al menţinerii invariabilităţii cinematice a acestuia.

După stabilirea sistemului de bază, se introduc în locul legăturilor, eforturile static nedeterminate notate de obicei cu $X_1, \ldots X_n$, n fiind egal cu gradul de nedeterminare al sistemului. În locurile unde deplasările liniare sunt excluse se introduc forţe, iar în locurile unde sunt excluse deplasările unghiulare, se introduc momente.

În cazul legăturilor interioare, eforturile static nedeterminate se introduc perechi, egale şi de sensuri contrare, pentru fiecare parte a sistemului rămas după secţionarea acestuia.

8.8.2. Ecuaţiile canonice ale metodei eforturilor

Se consideră corpul din figura 8.4a static nedeterminat asupra căruia acţionează sarcinile notate simbolic cu P şi necunoscutele static nedeterminate $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$.

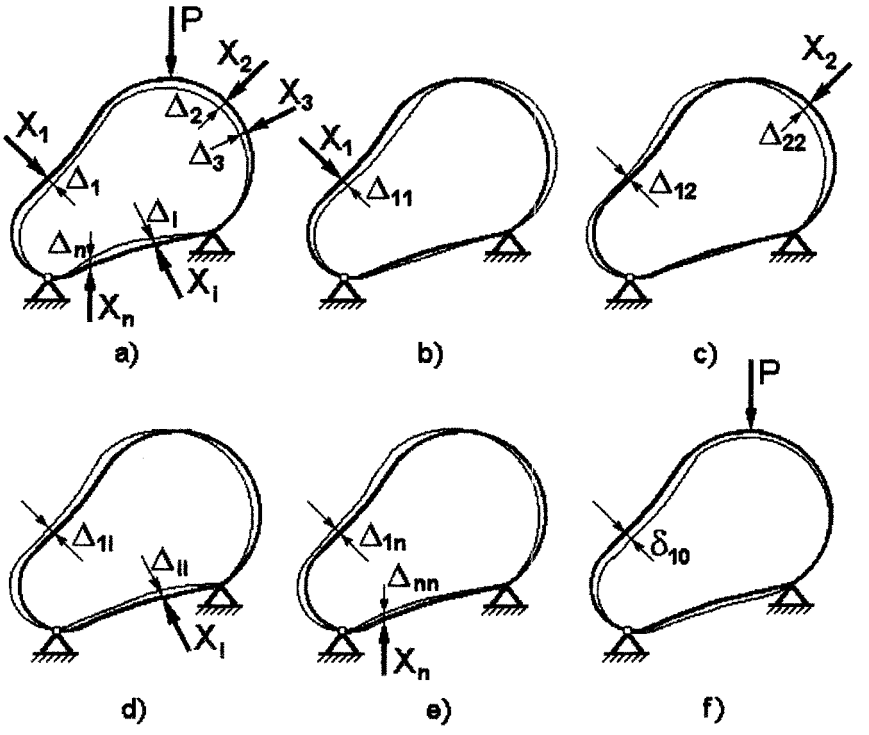


Fig. 8.4

Sub acţiunea sarcinilor şi necunoscutelor static nedeterminate, corpul se deformează. Notând cu Δ_1 deplasarea în dreptul punctului de aplicaţie al necunoscutei static nedeterminate X_1, pe direcţia acesteia şi considerând separat efectul sarcinilor (P) şi al necunoscutelor static nedeterminate (X_1, X_2, . . . , X_i, . . . , X_n), se poate scrie egalitatea

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \ldots + \Delta_{1i} + \ldots + \Delta_{1n} + \delta_{10}, \qquad (8.45)$$

în care:

Δ_{11} este deplasarea pe direcţia necunoscutei static nedeterminată X_1, produsă de sarcina X_1;

Δ_{12} este deplasarea pe direcţia necunoscutei static nedeterminată X_1, produsă de sarcina X_2;

Δ_{1i} este deplasarea pe direcţia necunoscutei static nedeterminată X_1, produsă de sarcina X_i;

Δ_{1n} este deplasarea pe direcţia necunoscutei static nedeterminată X_1, produsă de sarcina X_n;

δ_{10} este deplasarea pe direcţia necunoscutei static nedeterminată X_1, produsă de sarcina P.

În acelaşi mod se pot scrie şi deplasările pe direcţiile necunoscutelor static nedeterminate X_2, . . . , X_i, . . . , X_n.

Notând cu

δ_{ij} deplasarea în dreptul punctului de aplicaţie al necunoscutei static nedeterminată X_i pe direcţia acesteia, de către o forţă unitară aplicată în acelasi punct şi pe aceeaşi direcţie cu X_j, deplasarea Δ_{ij} pe direcţia lui X_i datorată forţei X_j este dată de relaţia:

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} \cdot X_j. \qquad (8.46)$$

Deplasarea totală pe direcţia necunoscutei static nedeterminată X_i este:

$$\Delta_i = \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + \delta_{ii}X_i + \ldots + \delta_{in}X_n + \delta_{i0}. \qquad (8.47)$$

La sistemele de bază ale sistemelor static nedeterminate, deplasările Δ_i sunt însă nule, deoarece au loc în legături care împiedică fie deplasări liniare, fie deplasări unghiulare absolute sau relative.

Se obţine astfel un sistem cu un număr de ecuaţii, egal cu cel al necunoscutelor static nedeterminate, şi anume:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1i}X_i + \cdots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0 \\ \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2i}X_i + \cdots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} = 0 \\ \vdots \\ \Delta_n = \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{ni}X_i + \cdots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0 \end{cases} \quad (8.48)$$

Ecuaţiile acestui sistem se numesc *ecuaţiile canonice ale metodei eforturilor.*

Deplasările δ_{ij} din ecuaţiile canonice se pot determina prin metoda *Mohr-Maxwell* sau prin altă metodă. În baza teoremei reciprocităţii deplasărilor se poate scrie

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (8.49)$$

şi deci, volumul de calcule pentru determinarea coeficienţilor sistemului (8.48) se reduce semnificativ.

Pentru calculul deplasărilor δ_{ij} cu ajutorul metodei Mohr-Maxwell, se fac următoarele notaţii:

M^0 - momentul încovoietor într-o sectiune oarecare a sistemului de bază, produs de forţele exterioare date;

m_i - momentul încovoietor într-o sectiune oarecare a sistemului de bază, produs de o sarcină egală cu unitatea, aplicată în punctul şi pe direcţia necunoscutei static nedeterminată X_i.

Cu aceste notaţii, deplasările din ecuaţiile canonice ale sistemului (8.48) sunt:

$$\delta_{ij} = \int_{(l)} \frac{m_i \cdot m_j}{EI} dx \quad (8.50)$$

$$\delta_{ii} = \int_{(l)} \frac{m_i \cdot m_i}{EI} dx \quad (8.51)$$

$$\delta_{i0} = \int_{(l)} \frac{M^0 \cdot m_i}{EI} dx \quad (8.52)$$

Pentru calculul acestor integrale se poate folosi procedeul Mohr-Vereşceaghin.

În cazul în care barele sistemului elastic sunt supuse la alte eforturi decât cele de încovoiere, deplasările δ_{ij}, δ_{ii} şi δ_{i0} se calculează luând în considerare eforturile respective.

8.9. Calculul deplasărilor la sistemele static nedeterminate

După ridicarea nedeterminării, deplasările într-un sistem static nedeterminat se pot calcula prin metodele cunoscute.

La un sistem static nedeterminat, calculul necunoscutelor static nedeterminate $X_1 \ldots X_n$ echivalează cu transformarea acestuia într-un sistem static determinat (sistem de bază).

Deplasarea într-un punct oarecare K poate fi calculată pe baza relaţiei (8.47) astfel:

$$\delta_k = \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{ki}X_i + \ldots + \delta_{kn}X_n + \delta_{k0} \qquad (8.53)$$

unde deplasările δ_{ki} şi δ_{k0} se pot determina prin metoda *Mohr-Maxwell*. Dacă bara este solicitată de exemplu la încovoiere, aceşti coeficienţi sunt:

$$\delta_{ki} = \int_{(l)} \frac{m_k \cdot m_i}{EI} dx; \qquad (8.54)$$

$$\delta_{k0} = \int_{(l)} \frac{M^0 \cdot m_k}{EI} dx. \qquad (8.55)$$

Înlocuind aceste expresii în relaţia (8.53), rezultă:

$$\delta_k = \frac{1}{EI}\left(X_1 \int_{(l)} m_k m_1 dx + X_2 \int_{(l)} m_k m_2 dx + \cdots + X_n \int_{(l)} m_k m_n dx + \int_{(l)} M^0 m_k dx \right),$$

sau

$$\delta_k = \frac{1}{EI} \int_{(l)} (m_1 X_1 + m_2 X_2 + \cdots + m_n X_n + M^0) m_k dx. \qquad (8.56)$$

Întrucât prin definiţie, sistemul de bază încărcat cu sarcinile exterioare şi cu necunoscutele static nedeterminate este echivalent cu sistemul static nedeterminat real, rezultă că momentul M este dat de suprapunerea efectelor în sistemul de bază:

$$M = M^0 + m_1X_1 + m_2X_2 + \ldots + m_nX_n. \qquad (8.57)$$

Ţinând seama de relaţia (8.57), expresia deplasării unui punct oarecare K al sistemului real este:

$$\boxed{\delta_k = \frac{1}{EI}\int_{(l)} M \cdot m_k dx} \qquad (8.58)$$

Rezultă că:

într-un sistem static nedeterminat, solicitat la încovoiere, deplasarea într-un punct oarecare se obţine cu formula Mohr-Maxwell, în care intervin momentele încovoietoare reale din sistemul static nedeterminat şi momentul sarcinii unitare aplicate pe sistemul de bază în punctul şi pe direcţia pe care se calculează deplasarea.

În consecinţă, calculul deplasărilor la un sistem static nedeterminat se reduce la calculul deplasărilor într-un sistem static determinat. Aceasta presupune:

- construirea diagramelor de eforturi ale sistemului static nedeterminat;
- construirea diagramelor de eforturi pentru o sarcină egală cu unitatea, aplicată pe sistemul de bază în punctul şi pe direcţia deplasării căutate;
- aplicarea procedeului Mohr-Vereşceaghin pentru calculul deplasării.

8.10. Aplicaţii

8.10.1. Calculul deplasărilor

Aplicaţia 8.1. Să se calculeze deplasarea capătului liber pentru bara dreaptă din figura 8.5. Se cunosc: F, l, EA = const.

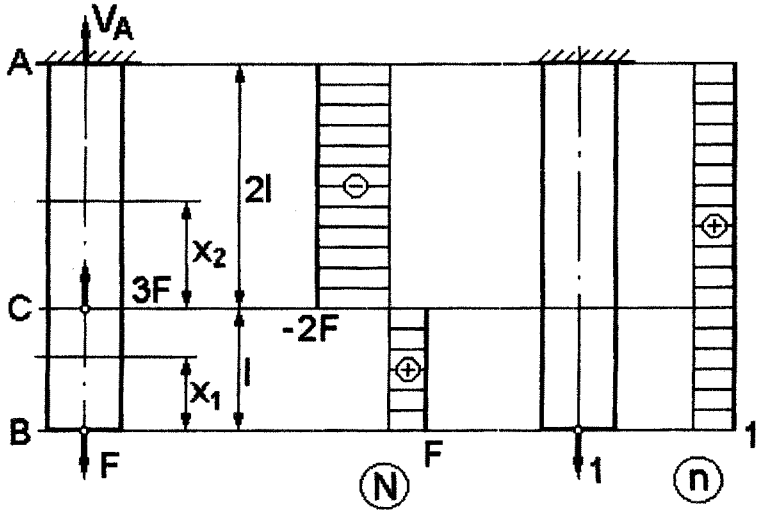


Fig. 8.5

Rezolvare

Metoda bazată pe teorema lui Castigliano

Deorece pe bară sunt aplicate două forţe, cea de la capătul liber se notează F = F*.

Forţele axiale în cele două regiuni ale barei sunt:

- regiunea BC; $x_1 \in (0,l)$; $N(x_1) = F^*$;

- regiunea AC; $x_2 \in (0,2l)$; $N(x_2) = F^* - 3F$.

Deplasarea capătului liber al barei este:

$$u_B = \frac{\partial U}{\partial F^*} = \frac{1}{EA}\int_{(3l)} N\frac{\partial N}{\partial F^*}dx = \frac{1}{EA}\left[\int_0^l F\cdot 1\cdot dx_1 + \int_0^{2l}(-2F)\cdot 1\cdot dx_2\right] = -\frac{3Fl}{EA}$$

Metoda Mohr-Maxwell

Se trasează diagrama de forţe axiale N, pentru încărcarea dată.
Se încarcă bara cu o forţă unitară aplicată la capătul liber şi se trasează diagrama de forţe axiale n.
Deplasarea capătului liber al barei este:

$$u_B = \frac{1}{EA}\int_{(3l)} N \cdot n\,dx = \frac{1}{EA}\left[(F \cdot l)\cdot 1 + (-2F \cdot 2l)\cdot 1\right] = -\frac{3Fl}{EA}.$$

Aplicaţia 8.2. Să se calculeze rotirea capătului liber pentru bara dreaptă de secţiune circulară din figura 8.6.
Se cunosc: F, l, d, GI_p = const.

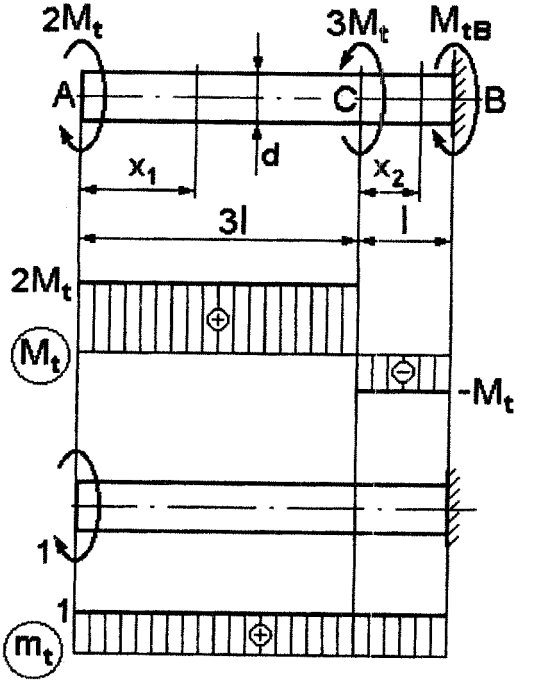


Fig. 8.6

Rezolvare

Metoda bazată pe teorema lui Castigliano

Deorece pe bară sunt aplicate două momente de torsiune, cel de la capătul liber se notează $2M_t = M_t^*$.

Momentele de torsiune în cele două regiuni ale barei sunt:

- regiunea AC; $x_1 \in (0,3l)$; $M_t(x_1) = M_t^*$;

- regiunea BC; $x_2 \in (0,l)$; $M_t(x_2) = M_t^* - 3M_t$.

Deplasarea capătului liber al barei este:

$$\Delta\varphi_A = \frac{\partial U}{\partial M_t^*} = \frac{1}{GI_{p\,(4l)}} \int M_t \frac{\partial M_t}{\partial M_t^*} dx = \frac{1}{GI_p}\left[\int_0^{3l} 2M_t \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_0^{1} (-M_t) \cdot 1 \cdot dx_2\right] = \frac{5M_t l}{GI_p}$$

Metoda Mohr-Maxwell

Se trasează diagrama de momente de torsiune M_t, pentru încărcarea dată.

Se încarcă bara cu un moment de torsiune unitar aplicat la capătul liber şi se trasează diagrama de momente de torsiune m_t.

Deplasarea capătului liber al barei este:

$$\Delta\varphi_A = \frac{1}{GI_{p\,(4l)}} \int M_t \cdot m_t dx = \frac{1}{GI_p}\left[(2M_t \cdot 3l) \cdot 1 + (-M_t \cdot l) \cdot 1\right] = \frac{5M_t l}{GI_p}$$

Aplicaţia 8.3. Să se calculeze deplasările de la capătul liber pentru grinda dreaptă din figura 8.7. Se cunosc: q, l, EI_z = const.

Rezolvare

Metoda bazată pe teorema lui Castigliano

La capătul liber al grinzii se introduc forţa fictivă F* şi momentul fictiv M*.

Momentul încovoietor dintr-o secţiune oarecare *x* este:

$$M_{iz}(x) = -F^* x - M^* - \frac{qx^2}{2}, \quad \forall x \in (0,l).$$

Săgeata şi rotirea din punctul *B* sunt:

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial F^*} = \frac{1}{EI_z}\int_0^l M_{iz}(x)\frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial F^*} dx = \frac{1}{EI_z}\int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-x)dx = \frac{ql^4}{8EI_z}$$

$$\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial M^*} = \frac{1}{EI_z}\int_0^l M_{iz}(x)\frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial M^*} dx = \frac{1}{EI_z}\int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-1)dx = \frac{ql^3}{6EI_z}$$

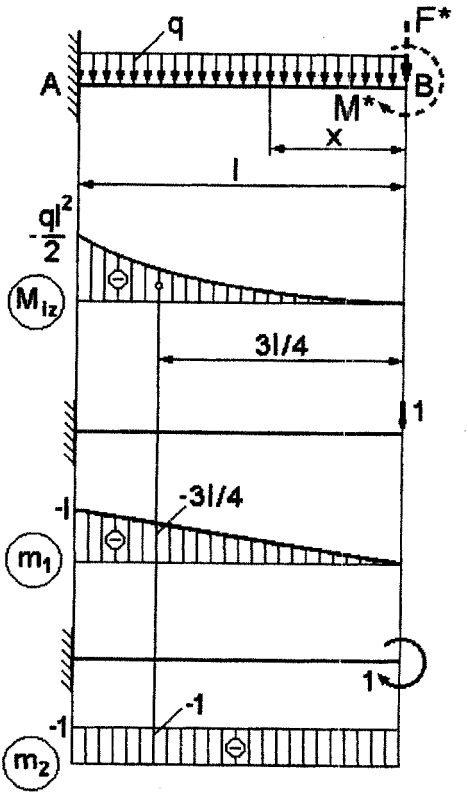


Fig. 8.7

Metoda Mohr-Maxwell

Se trasează diagrama de momente încovoietoare M, pentru încărcarea dată.

Se încarcă grinda cu o forţă unitară aplicată la capătul liber şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_1.

Se încarcă grinda cu un moment unitar aplicat la capătul liber şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_2.

Aplicând procedeul Mohr-Vereşceaghin, săgeata şi rotirea din punctul B sunt:

$$v_B = \frac{1}{EI_z}\int_0^l M \cdot m_1 dx = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{3}\frac{l\cdot(-ql^2)}{2}\cdot\left(-\frac{3l}{4}\right)\right] = \frac{ql^4}{8EI_z};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{EI_z}\int_0^l M \cdot m_2 dx = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{3}\frac{l\cdot(-ql^2)}{2}\cdot(-1)\right] = \frac{ql^3}{6EI_z}.$$

Aplicaţia 8.4. Pentru grinda din figura 8.8, să se calculeze săgeata şi rotirea în punctul de aplicaţie al forţei F.
Se cunosc: F, l, E, $I_{z1} = I_1$; $I_{z2} = I_2$ şi $I_{z3} = I_3$.

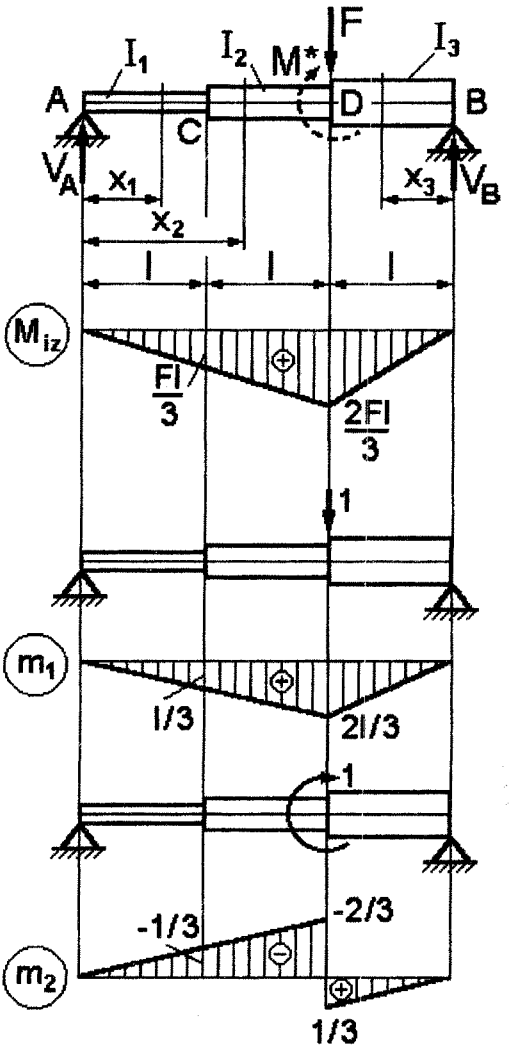


Fig. 8.8

Rezolvare

Metoda bazată pe teorema lui Castigliano

Deoarece în punctul *D* nu acţionează un moment concentrat, pentru a calcula rotirea se introduce momentul fictiv M*.

Din ecuaţiile de echilibru,

$V_A \cdot 3l + M^* - F \cdot l = 0;$

$M^* + F \cdot 2l - V_B \cdot 3l = 0,$

rezultă reacţiunile: $V_A = \frac{F}{3} - \frac{M^*}{3l}; \quad V_B = \frac{2F}{3} + \frac{M^*}{3l}.$

Momentele încovoietoare în cele trei regiuni ale barei sunt:

- regiunea AC; $x_1 \in (0,l)$; $M_{iz}(x_1) = V_A \cdot x_1 = \left(\frac{F}{3} - \frac{M^*}{3l}\right) \cdot x_1;$

- regiunea CD; $x_2 \in (l,2l)$; $M_{iz}(x_2) = V_A \cdot x_2 = \left(\frac{F}{3} - \frac{M^*}{3l}\right) \cdot x_2;$

- regiunea BD; $x_3 \in (0,l)$; $M_{iz}(x_3) = V_B \cdot x_3 = \left(\frac{2F}{3} + \frac{M^*}{3l}\right) \cdot x_3.$

Săgeata şi rotirea din punctul *D* sunt:

$$v_D = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_{(3l)} \frac{M_{iz}(x)}{EI_z(x)} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial F} dx =$$

$$= \int_0^l \frac{Fx_1}{3EI_1} \frac{x_1}{3} dx_1 + \int_l^{2l} \frac{Fx_2}{3EI_2} \frac{x_2}{3} dx_2 + \int_0^l \frac{2Fx_3}{3EI_3} \frac{2x_3}{3} dx_3 = \frac{Fl^3}{27E}\left(\frac{1}{I_1} + \frac{7}{I_2} + \frac{4}{I_3}\right)$$

$$\varphi_D = \frac{\partial U}{\partial M^*} = \int_{(3l)} \frac{M_{iz}(x)}{EI_z(x)} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial M^*} dx =$$

$$= \int_0^l \frac{Fx_1}{3EI_1}\left(-\frac{x_1}{3l}\right) dx_1 + \int_l^{2l} \frac{Fx_2}{3EI_2}\left(-\frac{x_2}{3l}\right) dx_2 + \int_0^l \frac{2Fx_3}{3EI_3}\left(\frac{x_3}{3l}\right) dx_3 = \frac{Fl^2}{27E}\left(-\frac{1}{I_1} \frac{7}{I_2} + \frac{2}{I_3}\right)$$

Metoda Mohr-Maxwell

Se trasează diagrama de momente încovoietoare M, pentru încărcarea dată.

Se încarcă grinda cu o forţă unitară aplicată în punctul *D* şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_1.

Se încarcă grinda cu un moment unitar aplicat în punctul *D* şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_2.

Aplicând procedeul Mohr-Vereşceaghin, săgeata şi rotirea din punctul *D* sunt:

$$v_D = \int_{(3l)} \frac{M \cdot m_1}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_1} \frac{1}{2} \frac{Fl}{3} \cdot \frac{2l}{9} + \frac{1}{EI_2} \left(\frac{1 \cdot Fl}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{Fl}{3} \cdot \frac{5l}{9} \right) +$$

$$+ \frac{1}{EI_3} \frac{1}{2} \frac{2Fl}{3} \cdot \frac{4l}{9} = \frac{Fl^3}{27E} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{7}{I_2} + \frac{4}{I_3} \right)$$

$$\varphi_D = \int_{(3l)} \frac{M \cdot m_2}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_1} \frac{1}{2} \frac{Fl}{3} \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) + \frac{1}{EI_2} \left[\frac{1 \cdot Fl}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{Fl}{3} \cdot \left(-\frac{5}{9} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI_3} \frac{1}{2} \frac{2Fl}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{Fl^2}{27E} \left(-\frac{1}{I_1} - \frac{7}{I_2} + \frac{2}{I_3} \right)$$

8.10.2. Sisteme static nedeterminate

Aplicaţia 8.5. Să se determine reacţiunile pentru bara din figura 8.9 şi să se calculeze deplasarea punctului K.
Se cunosc: F, l, EA = const.

Rezolvare

1. Calculul reacţiunilor.

Ecuaţia de echilibru este:

$$V_A - 5F + 2F + V_B = 0.$$

Problema este simplu static nedeterminată deoarece sunt două necunoscute şi o singură ecuaţie de echilibru static.
Ecuaţia suplimentară se scrie din condiţia de deformaţie.

a) *Metoda bazată pe teorema lui Castigliano*

Se aplică teorema lui Castigliano în raport cu necunoscuta static nedeterminată V_A:

$$\frac{\partial U}{\partial V_A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{EA} \int_{(4l)} N(x) \frac{\partial N(x)}{\partial V_A} dx = 0$$

Forţele axiale în cele trei regiuni ale barei sunt:

- regiunea AC; $x_1 \in (0,l)$; $N(x_1) = -V_A$;
- regiunea CD; $x_2 \in (0,2l)$; $N(x_2) = -V_A + 5F$;
- regiunea BD; $x_3 \in (0,l)$; $N(x_3) = -V_A + 3F$.

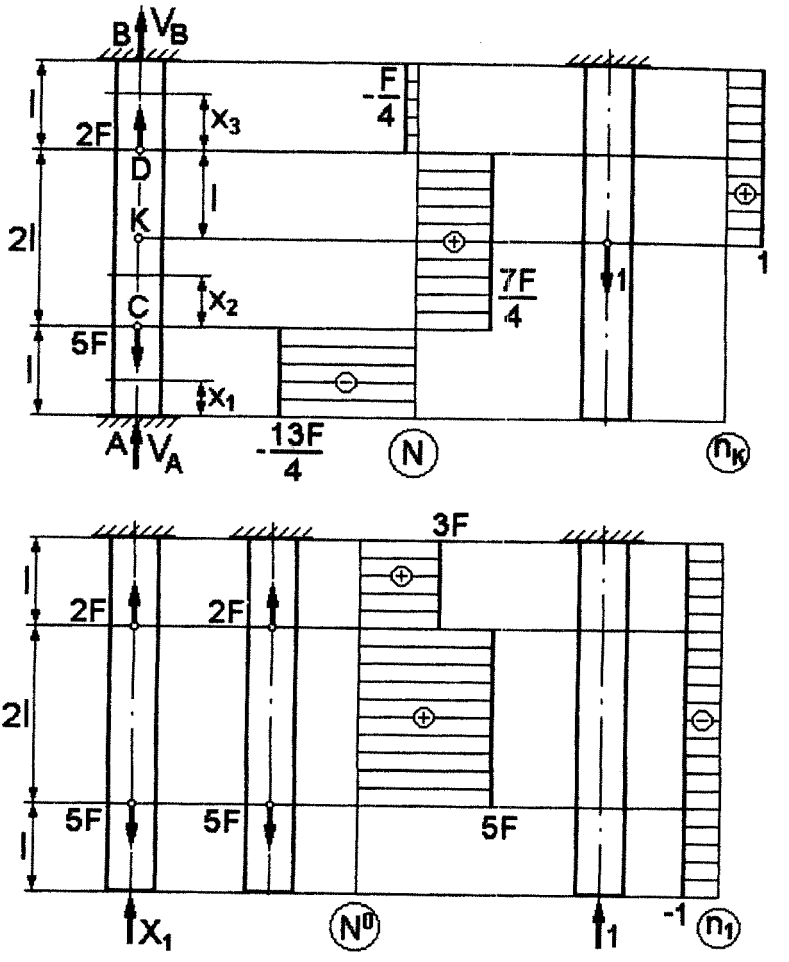


Fig. 8.9

Ecuaţia suplimentară devine:

$$\int_0^l(-V_A)\cdot(-1)dx_1+\int_0^{2l}(-V_A+5F)\cdot(-1)dx_2+\int_0^l(-V_A+3F)\cdot(-1)dx_3=0$$

Efectuând calculele se obţine:

$$V_A\cdot l+(V_A-5F)\cdot 2l+(V_A-3F)\cdot l=0 \Rightarrow V_A=\frac{13}{4}F$$

Înlocuind V_A în ecuaţia de echilibru, rezultă

$$V_B=3F-V_A=3F-\frac{13}{4}F \Rightarrow V_B=-\frac{F}{4}$$

b) *Metoda eforturilor*

Bara fiind simplu static nedeterminată, pentru realizarea sistemului de bază este necesară eliminarea unei singure legături. Se elimină legătura pe verticală din reazemul A, înlocuind-o cu necunoscuta static nedeterminată X_1.

Ecuaţia canonică este:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

Se trasează diagrama de forţe axiale N^0 , pentru sistemul de bază încărcat cu forţele exterioare date.

Se încarcă sistemul de bază cu o forţă unitară aplicată în punctul şi pe direcţia necunoscutei X_1 şi se trasează diagrama de forţe axiale n_1.

Coeficienţii ecuaţiei canonice sunt:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\int_{(4l)} n_1 \cdot n_1 dx = \frac{1}{EA} 4l \cdot (-1) \cdot (-1) = \frac{4l}{EA};$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EA}\int_{(4l)} N^0 \cdot n_1 dx = \frac{1}{EA}[2l \cdot 5F \cdot (-1) + 1 \cdot 3F \cdot (-1)] = -\frac{13Fl}{EA}.$$

Din ecuaţia canonică rezultă necunoscuta static nedeterminată X_1:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{13Fl}{EA} \cdot \frac{EA}{4l} = \frac{13}{4}F.$$

Reacţiunea V_B rezultă din ecuaţia de echilibru:

$$V_B = -\frac{F}{4}$$

2. Calculul deplasării

Pentru calculul deplasării punctului K se foloseşte formula Mohr-Maxwell.

Se trasează diagrama de forţe axiale N, pentru bara dată.

Se încarcă sistemul de bază cu o forţă axială unitară aplicată în punctul K şi se trasează diagrama de forţe axiale n_k.

Deplasarea punctului K este:

$$u_k = \frac{1}{EA}\int_{(4l)} N \cdot n_k dx = \frac{1}{EA}\left[1 \cdot \frac{7F}{4} \cdot 1 + 1 \cdot \left(-\frac{F}{4}\right) \cdot 1\right] = \frac{3Fl}{2EA}.$$

Aplicaţia 8.6. Să se determine reacţiunile pentru grinda din figura 8.10 şi să se calculeze deplasările în punctul K.
Se cunosc: q, l, EI_z = const.

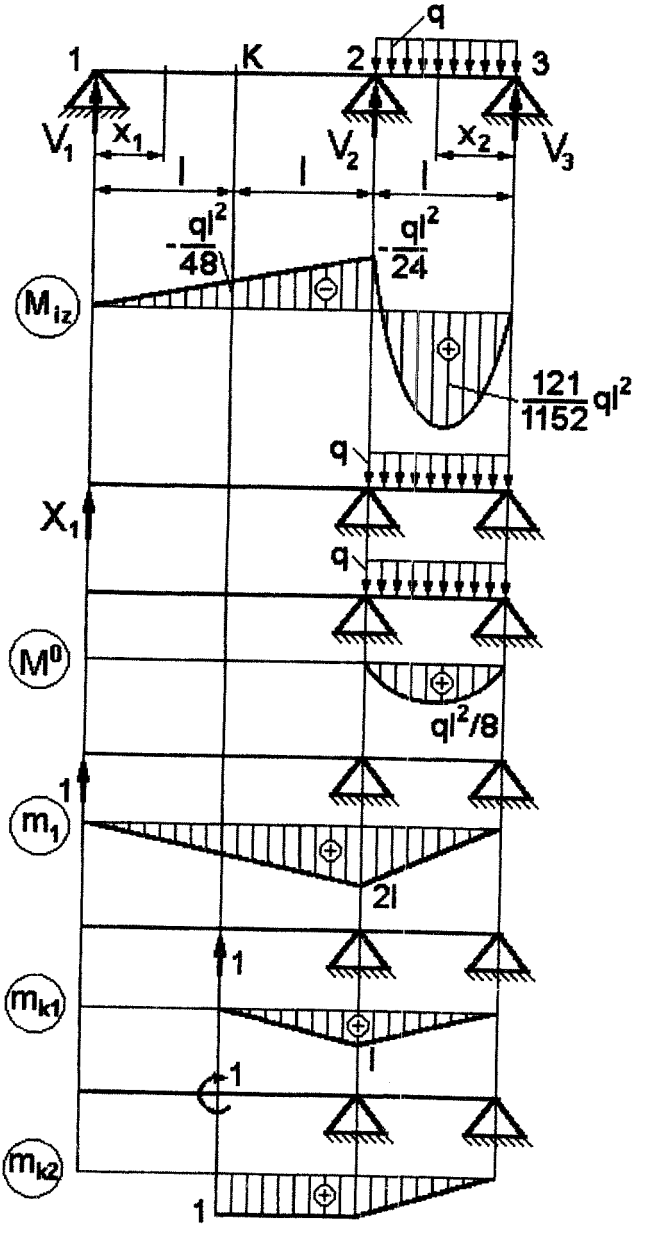


Fig. 8.10

Rezolvare

1. Determinarea reacţiunilor

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$V_2 \cdot 2l - ql \cdot \frac{5l}{2} + V_3 \cdot 3l = 0$$

$$V_1 \cdot 2l + ql \cdot \frac{l}{2} - V_3 \cdot l = 0$$

Problema este simplu static nedeterminată deoarece sunt trei necunoscute şi numai două ecuaţii de echilibru static.

Ecuaţia suplimentară se scrie din condiţia de deformaţie.

a) *Metoda bazată pe teorema lui Castigliano*

Se aplică teorema lui Castigliano în raport cu necunoscuta static nedeterminată V_3:

$$\frac{\partial U}{\partial V_3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI_z} \int_{(3l)} M_{iz}(x) \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial V_3} dx = 0.$$

Din ecuaţiile de echilibru se exprimă reacţiunile V_1 şi V_2 în funcţie de reacţiunea V_3:

$$V_1 = \frac{V_3}{2} - \frac{ql}{4}; \quad V_2 = -\frac{3}{2}V_3 + \frac{5}{4}ql.$$

Momentele încovoietoare în cele două regiuni ale barei sunt:

- regiunea 1-2; $x_1 \in (0,2l)$;

$$M_{iz}(x_1) = V_1 x_1 = \left(\frac{V_3}{2} - \frac{ql}{4}\right) x_1;$$

- regiunea 2-3; $x_2 \in (0,l)$;

$$M_{iz}(x_2) = V_3 x_2 - \frac{q x_2^2}{2}.$$

Ecuaţia suplimentară devine

$$\int_0^{2l} \left(\frac{V_3}{2} - \frac{ql}{4}\right) x_1 \cdot \frac{x_1}{2} dx_1 + \int_0^{l} \left(V_3 x_2 - \frac{q x_2^2}{2}\right) \cdot x_2 dx_2 = 0.$$

Efectuând calculele se obţine:

$$\frac{V_3}{4} \cdot \frac{(2l)^3}{3} - \frac{ql}{8} \cdot \frac{(2l)^3}{3} + V_3 \cdot \frac{l^3}{3} - \frac{q}{2} \cdot \frac{l^4}{4} = 0 \Rightarrow V_3 = \frac{11}{24} ql.$$

Cunoscând V_3, se pot determina şi celelalte două reacţiuni:

$$V_1 = -\frac{ql}{48}; \quad V_2 = \frac{9}{16}ql.$$

b) *Metoda eforturilor*

Grinda fiind simplu static nedeterminată, pentru realizarea sistemului de bază este necesară eliminarea unei singure legături. Se elimină legătura pe verticală din reazemul *1*, înlocuind-o cu necunoscuta static nedeterminată X_1.

Ecuaţia canonică este:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

Se trasează diagrama de momente încovoietoare M^0, pentru sistemul de bază încărcat cu forţele exterioare date.

Se încarcă sistemul de bază cu o forţă unitară aplicată în punctul şi pe direcţia necunoscutei X_1 şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_1.

Coeficienţii ecuaţiei canonice sunt:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z}\int_{(3l)} m_1 \cdot m_1 dx = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{2l\cdot 2l}{2}\cdot\frac{4l}{3} + \frac{1\cdot 2l}{2}\cdot\frac{4l}{3}\right) = \frac{4l^3}{EI_z};$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_z}\int_{(3l)} M^0 \cdot m_1 dx = \frac{1}{EI_z}\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot 1 = \frac{ql^4}{12EI_z}.$$

Din ecuaţia canonică rezultă necunoscuta static nedeterminată X_1:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{ql^4}{12EI_z}\cdot\frac{EI_z}{4l^3} = -\frac{ql}{48}.$$

Reacţiunile V_2 şi V_3 rezultă din ecuaţiile de echilibru:

$$V_2 = \frac{9}{16}ql; \quad V_3 = \frac{11}{24}ql.$$

2. Calculul deplasării

Pentru calculul deplasărilor din punctul K se foloseşte formula Mohr-Maxwell.

Se trasează diagrama de momente încovoietoare *M*, pentru grinda dată.

Se încarcă sistemul de bază cu o forţă unitară verticală aplicată în punctul K şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_{k1}.

Se încarcă sistemul de bază cu un moment unitar aplicat în punctul K şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_{k2}.
Săgeata şi rotirea în punctul K sunt:

$$v_K = \frac{1}{EI_z}\int_{(3l)} M \cdot m_{k1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{EI_z}\left[1\cdot\left(-\frac{ql^2}{48}\right)\cdot\frac{l}{2} + 1\cdot\left(-\frac{ql^2}{48}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2l}{3} + \int_0^l\left(\frac{11}{24}qlx_2 - \frac{qx_2^2}{2}\right)\cdot x_2\,dx_2\right];$$

$$\Rightarrow \quad v_K = \frac{ql^4}{96EI_z};$$

$$\varphi_K = \frac{1}{EI_z}\int_{(3l)} M \cdot m_{k2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{EI_z}\left[1\cdot\left(-\frac{ql^2}{48} - \frac{ql^2}{24}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \int_0^l\left(\frac{11}{24}qlx_2 - \frac{qx_2^2}{2}\right)\cdot\frac{x_2}{l}\,dx_2\right];$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_K = -\frac{ql^3}{288EI_z}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. ALĂMOREANU, E., BUZDUGAN, GH., ILIESCU, N., MINCĂ., SANDU, M. - *"Îndrumar de calcul în ingineria mecanică"* - Editura tehnică, Bucureşti, 1996.
2. BAUŞIC, V., HORBANIUC, D., PALIHOVICI, V., LEON, D., BEJINARIU, V. - *"Rezistenţa materialelor"* - vol. 1, Rotaprint I. P. Iaşi, 1978.
3. BELIAEV, N. M. - *"Sbornik zadaci po soprotivleniiu materialov"* - Moskva, 1965.
4. BELYAEV, N. M. - *"Strength of Materials"* - Mir Publishers, Moscow, 1979.
5. BIA, C., ILLE, V., SOARE, M. V. - *"Rezistenţa materialelor şi teoria elasticităţii"* - Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
6. BUZDUGAN, GH. - *"Rezistenţa materialelor"* - Editura Academiei, Bucureşti, 1986.
7. DEUTSCH, I. - *"Rezistenţa materialelor"* - Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.
8. DIACONU, M. - *" Rezistenţa materialelor şi teoria elasticităţii"*, vol. 1 şi 2, Rotaprint I. P. Iaşi, 1987.
9. DROBOTĂ, V. - *" Rezistenţa materialelor "* - Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.
10. FEODOSIEV, V. I. - *"Resistencia de materiales"* - Editorial Mir, Moscú, 1980.
11. FEODOSIEV, V. I. - *"Rezistenţa materialelor"* - Editura Lumina, Chişinău, 1992.
12. FEODOSYEV, V. I. - *"Selected Problems and Questions in Strength of Materials"* - Mir Publishers, Moscow, 1977.
13. HORBANIUC, D. - *"Rezistenţa materialelor"* - vol. 1 şi 2, Rotaprint I. P. Iaşi, 1973.
14. MIROLIUBOV, I., ENGALYTCHEV, S., SERGUIEVSKI, N., ALMAMETOV, F., KOURITSYNE, N., SMIRNOV-VASSILIEV, K., IACHINA, L. - *"Résistance des materiaux. Manuel de résolution des problemes"* - 4e edition, Éditions Mir, Moscou, 1977.

15. PISSARENKO, G., YAKOVLEV, A., MATVÉEV, V. - "Aide - mémoire de résistance des materiaux" - Éditions Mir, Moscou, 1979.
16. PISARENKO, G. S., YÁKOVLEV, A. P., MATVÉEV, V. V. - *"Manual de resistencia de materiales"* - Editorial Mir, Moscú, 1989.
17. PONOMARIOV, S. D., BIDERMAN, V. L., LIHAREV, K. K., MAKUŞIN, V. M., MALININ, N. N., FEODOSIEV, V. I. - "Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini" - Editura tehnică, Bucureşti, vol. 1, 1960, vol. 2, 1963, vol. 3, 1964.
18. POSEA, N. - *"Rezistenţa materialelor"* - Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.
19. SOARE, M. V., ILLE, V., BIA, C., PANŢEL, E., PETRINA, P., IORDACHE, D., SOARE, C. - *"Rezistenţa materialelor în aplicaţii"* - Editura tehnică, Bucureşti, 1996.
20. VOINEA, R., VOICULESCU, D., SIMION F. P. - *"Introducere în mecanica solidului cu aplicaţii în inginerie"* - Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

Universitatea Tehnică Iaşi
BIBLIOTECA